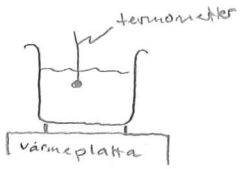
FÖRELÄSNING 1

Exempel 1: Uppvärmning av ett kärl



} process

Är uppmätt T < önskat T?
- Ja → öka effekten
- Nej → minska effekten

} regulator

Beteckna: uppmätt T med y
önskad T med r
effekt med u

En enkel regulator skulle kunna låta ändring i effekt vara proportionell mot skillnaden mellan r och y.

$$[u = u_0 + K(r-y), \quad K>0] \quad \text{(p-regulator)}$$

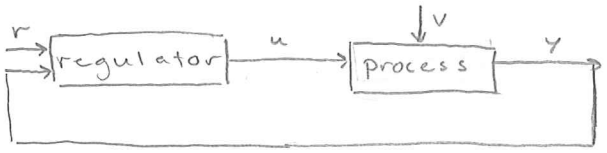
→ Hur stort ska K vara? Kommer i framtiden

Centrala begrepp

Generalisera exempel 1 till fallet när någonting ändras (u) för att påverka en process så att något (y) blir så nära det vi önskar (r) enligt någon bestämd relation (regulator).

Vi kallar:
- u - styrsignal / insignal
- y - ärvärde / utsignal
- r - börvärde / referenssignal

Om vi dessutom tar hänsyn till att det kan förekomma störningar (v) illustreras detta med ett blockschema.

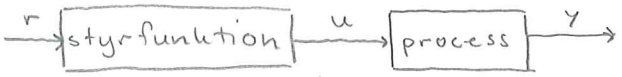


Detta är ett återkopplat system (feedback).

Anta att man i förväg bestämmer hur u ska se ut för att

$e = r - y$

ska bli så litet som möjligt.



Detta kallas börvärdes-framkoppling (feedforward)

Nackdelar för feedforward:
- Kan ej kompensera för ej mätbara störningar
- Om processens beteende avviker från det förväntade (modell) sker ingen kompensering.

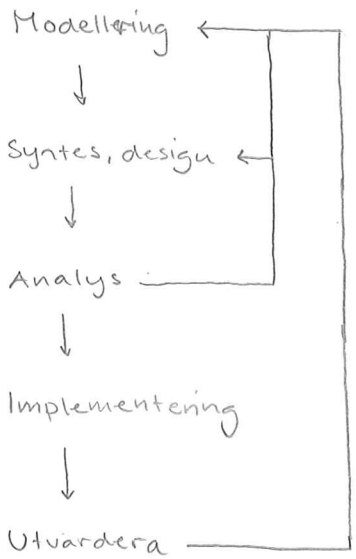
Fördelar för feedforward:
- Behöver inte mäta y
- Möjlighet att få snabb följning av y till r

FF + FB kan vara riktigt bra!

Två ytterligare centrala begrepp:

- Styrning: aktivt påverkar processen så att $y(t)$ följer ett varierande $r(t)$ (servoproblemet)
- Reglering: påverka så att $y(t)$ ligger så nära ett konstant r trots störning (kräver återkoppling)

Reglerteknisk process



Tillämpningar

- Processindustri
  - Temperatur, koncentration, tryck, flöde...
- Bioteknik
  - Samma som process + substrathalt, ekologi
- Medicin
  - Hjärt- och lungmaskiner, pacemaker
- Farkosttekniik
  - Farthållning, servo, kurshållning
- Tillverkningsindustri
  - Robotar
- Ekonomi
  - Köp-säljstrategier, utbud-efterfrågan optimering

Statisk vs. dynamisk

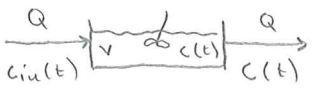
Statisk: ändring i insignal, orsakar omedelbart fullständigt genomslag i utsignal ($y(t) = f(u(t))$).

Dynamisk: en inneboende trögket gör att utsignalen även beror på gamla insignalsvärden, $u(t-\tau)$ där $\tau > 0$

T. ex. $y(t) = \int_0^t g(\tau)\, u(t-\tau)\, d\tau$ ($g(\tau)$ = viktfunktion)

Trögheten härrör typiskt från upplagring av energi eller massa, alt. transportfördröjningar.

Exempel 2: bufferttank



MB: $\frac{d}{dt}(V \cdot c(t)) = Q c_{in}(t) - Q c(t)$

förändring av mängd flöde — inflöde — utflöde

Med: $c_{in}(t) = u(t)$

$c(t) = y(t)$

$$\longrightarrow \frac{d}{dt} y(t) = -\frac{Q}{V} y(t) + \frac{Q}{V} u(t)$$

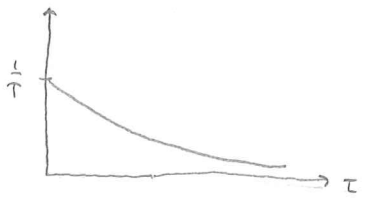
Detta är en ODE som har lösningen:

$$y(t) = \int_0^t \frac{1}{T} e^{-t/T}\, u(t-\tau)\, d\tau$$

där $T = \frac{V}{Q}$ [s] kallas tidskonstant

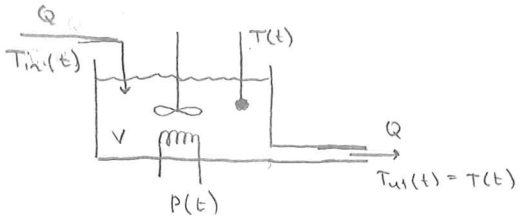
Vi ser att viktfunktionen är

$$g(\tau) = \frac{1}{T} e^{-t/T}$$



FÖRELÄSNING 2

Exempel 1: uppvärmning i bufferttank



Problem: Bestäm en relation för den tillförda effekten, som gör att en önskad T_{ut} kan hållas trots stegändringar i ingående temperatur T_{in}.

Modellera: energibalans

$$\frac{d}{dt}(\rho C_p V T(t)) = \rho C_p Q T_{in}(t) + P(t) - \rho C_p Q T(t)$$

$$\longrightarrow \tau \frac{d}{dt} y(t) = -y(t) + V(t) + \frac{1}{\rho C_p Q} u(t) \quad (1)$$

Linjär ODE av första ordningen:

- Linjär - inga kvadrater, produkter osv. av variabler (u, y, v)
- Första ordningen - endast en tidsderivata

Laplacetransform

M.h.a. en transform kan en linjär diffekvation omformas till en algebraisk ekvation.

$\mathcal{L}$-transformen av en tidsfunktion $f(t)$ är den komplexa funktionen $F(s)$.

$$F(s) = \mathcal{L}\{f(t)\} = \int_0^\infty f(t) e^{-st} dt$$

Inversa $\mathcal{L}$-transformen

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} = \frac{1}{2\pi j} \int_{\tau - j\infty}^{\tau + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad t \geq 0$$

I praktiken löses detta med tabell eller mjukvara

Viktiga räkneregler:

- Superpositionssatsen: $\mathcal{L}\{c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\} = c_1 F_1(s) + c_2 F_2(s)$
- Derivering: $\mathcal{L}\left\{\frac{d^n}{dt^n} f(t)\right\} = s^n F(s)$ (om $f(0) = f'(0) = \dots$)
- Integration: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t f(\tau)\,d\tau\,dt..\right\} = \frac{1}{s^n} F(s)$
- Förskjutningssatsen: $\mathcal{L}\{f(t-T)\} = e^{-sT} F(s)$
- Dämpningssatsen: $\mathcal{L}\{e^{-at} f(t)\} = F(s+a)$
- Faltningssatsen: $\mathcal{L}\left\{\int_0^t g(t-\tau) f(\tau)\,d\tau\right\} = G(s) F(s)$
- Begynnelsevärdessatsen: $\lim_{t \to 0} f(t) = \lim_{s \to \infty} sF(s)$

Tillbaka till Exempel 1

Låter y_v vara lösning till

$$\tau y_v = -y_v + v \quad (2)$$

och

$$\tau y_u = -y_u + \frac{1}{QC_p\rho} u$$

$\Big\}$ (2)+(3) $\Rightarrow$ $\tau(y_v + y_u) = -(y_v + y_u) + V + \frac{1}{QC_p\rho} u$

$y = y_v + y_u$ är en lösning till (1) (Linjära system $\Rightarrow$ superposition)

Anta $y(0) = 0$

$$\mathcal{L}\{(1)\} = \tau s Y(s) = -Y(s) + V(s) + \frac{1}{QC_p\rho} U(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \underbrace{\frac{1}{1+s\tau} V(s)}_{Y_v(s)} + \frac{1/QC_p\rho}{1+s\tau} U(s)$$

Givet $v(t)$ och $u(t)$ kan $y(t)$ alltså bestämmas genom:

1. $V(s) = \mathcal{L}\{v(t)\}$

   $U(s) = \mathcal{L}\{u(t)\}$

T. ex.: $v(t) = \Gamma(t) = \begin{cases} 1, & t > 0 \\ 0, & t < 0 \end{cases}$

$$\Gamma(t) = 1/s$$

2. $Y_v(s) = \frac{1}{1+s\tau} V(s)$

$Y_u(s) = \frac{1/QC_p\rho}{1+s\tau} U(s)$

3. $y_v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_v(s)\}$

$y_u(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_u(s)\}$

T. ex.: $y_v(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_v(s)\} = \frac{1}{1+s\tau} \cdot \frac{1}{s} = 1 - e^{-t/\tau}$

4. $y(t) = y_v(t) + y_s(t)$

Poler

Def: Polerna till överföringsfunktionen

$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$

ges av de n rötter till $A(s) = 0$ $(p_1, p_2 \cdots p_n)$

$\longrightarrow$ dvs med algebrans fundamentalsats $A(s) = s^n + a_1 s^{n-1} + \ldots$

Nollställen

Def: Nollställen till

$G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}$

ges av $B(s) = 0$

Stabilitet

Def: En överföringsfunktion $G(s)$ är insignal/utsignal-stabil om och endast om $g(\tau) \longrightarrow 0$ då $\tau \longrightarrow \infty$ så att

$$\int_0^\infty |g(\tau)|\, d\tau < \infty$$

Överföringsfunktion

Generell ODE:

1. $y^{n}(t) + a_1 y^{n-1}(t) + \ldots = b_0 u^{n}(t) + \ldots + b_n u(t)$

2. $s^{n} Y(s) + \ldots + a_n Y(s) = b_0 s^{n} U(s) + \ldots + b_n U(s)$

3. $\underbrace{(s^{n} + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n)}_{A(s)} Y(s) = \underbrace{(b_0 s^{n} + \ldots + b_n)}_{B(s)} U(s)$

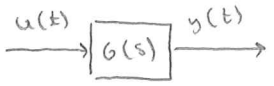
Om systemet är i vila vid $t = 0$ gäller

$$y(0) = y^{n-1}(0) = u(0) = u^{n-1}(0) = 0$$

Alltså:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{b_0 s^{n} + b_1 s^{n-1} + \ldots + b_n}{s^{n} + a_1 s^{n-1} + \ldots + a_n}}_{G(s) = \frac{B(s)}{A(s)}} U(s)$$

Systemet kan representeras av överföringsfunktionen $G(s)$ i ett blockelement



(Processmodell)

Sats: $G(s)$ är stabil om alla poler ligger i VHP ($\mathrm{Re}\{p_i\} < 0 \ \forall \ i$)

ÖVNING 1

1.1. Vilka tidsfunktioner motsvarar följande L-transformer?

a) $Y(s) = \dfrac{1}{s(s+1)}$

PBU: Ansätt $\dfrac{1}{s(s+1)} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{s+1}$

$$1 = A(s+1) + Bs = As + A + Bs$$

s: $A + B = 0$

s^0: $A = 1$

$\rightarrow B = -1$

$$Y(s) = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\} = 1 - e^{-t} \quad \text{för } t > 0$$

$$= (1 - e^{-t})\,\sigma(t)$$

b) $Y(s) = \dfrac{1}{s^2(s+1)}$

PBU: $\dfrac{1}{s^2(s+1)} = \dfrac{A}{s^2} + \dfrac{B}{s} + \dfrac{C}{s+1}$

$$1 = \underbrace{A(s+1)}_{As + A} + \underbrace{Bs(s+1)}_{Bs^2 + Bs} + Cs^2$$

$1 = A$

$0 = A + B \qquad B = -1$

$0 = B + C \qquad C = 1$

$$Y(s) = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

$$y(t) = (t - 1 + e^{-t})\,\sigma(t)$$

c) $Y(s) = \dfrac{1}{s(s+1)^2}$

PBU: $\dfrac{1}{s(s+1)^2} = \dfrac{A}{s} + \dfrac{B}{(s+1)} + \dfrac{C}{(s+1)^2}$

$1 = \underbrace{A(s+1)^2}_{As^2+2As+A} + \underbrace{Bs(s+1)}_{Bs^2+Bs} + Cs$

$1 = A$

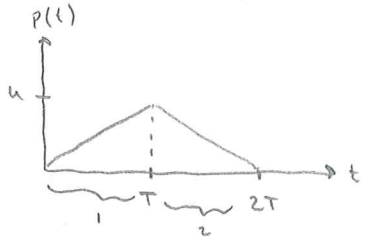
$0 = 2A + B + C \qquad C = -1$

$0 = A + B \qquad B = -1$

$Y(s) = \dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{(s+1)^2}$

$y(t) = \left(1 - e^{-t} - te^{-t}\right) T(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y(s)\}$

1.3. Härled L-transform för pulsen P(t)



L-transformens def:

$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)\,dt$$

Två intervall: $P_1(t)$ och $P_2(t)$

Söker: $P(s) = \int_0^\infty e^{-st} P(t)\,dt = \underbrace{\int_0^T e^{-st} P_1(t)\,dt}_{1} + \underbrace{\int_T^{2T} e^{-st} P_2(t)\,dt}_{2}$

$P_1(t) = \dfrac{u-0}{T-0}t = \dfrac{u}{T}t, \quad 0 \le t \le T$

$P_2(t) = u - \dfrac{u}{T}(t-T), \quad T \le t \le 2T$

1: $\int_0^T e^{-st}\frac{u}{T}t\,dt = \frac{u}{T}\int_0^T e^{-st}t\,dt = \frac{u}{T}\left[\frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\right]_0^T =$

$= \frac{u}{T}\left(\frac{e^{-sT}}{s^2}(-sT-1) - \frac{1}{s^2}(-1)\right) = \frac{u}{s^2T}\left(1-(1+sT)e^{-sT}\right)$

2. $\int_T^{2T} e^{-st}\left(h - \frac{h}{T}(t-T)\right)dt = 2h\int_T^{2T} e^{-st}dt - \frac{h}{T}\int_T^{2T} te^{-st}dt$

$\underbrace{\qquad}_{a} \qquad \underbrace{\qquad}_{b}$

a. $2h\int_T^{2T} e^{-st}dt = 2h\left[-\frac{1}{s}e^{-st}\right]_T^{2T} = 2h\left(-\frac{1}{s}e^{-s2T} + \frac{1}{s}e^{-sT}\right)$

b. $\frac{h}{T}\int_T^{2T} te^{-st}dt = \frac{h}{T}\left[\frac{e^{-st}}{s^2}(-st-1)\right]_T^{2T} = \frac{h}{T}\left(\frac{e^{-s2T}}{s^2}(-s2T-1) - \frac{e^{-sT}}{s^2}(-sT-1)\right)$

1 + 2. $P(s) = \frac{h}{s^2T}\left(1-(1+sT)e^{-sT} - 2sTe^{-s2T} + 2sTe^{-sT} + e^{-s2T}(s2T+1) - e^{-sT}(sT+1)\right)$

$= \frac{h}{s^2T}\left(1-2e^{-sT}+e^{-2sT}\right) = \frac{h}{s^2T}\left(1-e^{-sT}\right)^2$

1.4. Härled m.h.a. dämpningssatsen $\mathcal{L}$-transformen för

$y(t) = e^{-3t}(\cos(2t) + \sin(2t))$

Dämpningssatsen: $\mathcal{L}\{e^{-at}f(t)\} = \mathcal{L}\{F(s+a)\}$

$f(t) = \cos(2t) + \sin(2t)$ $\qquad y(t) = e^{-3t}f(t)$

$e^{-at} = e^{-3t}$ $\quad (a=3)$

$\mathcal{L}\{y(t)\} = F(s+3)$

$F(s) = \mathcal{L}\{\cos 2t + \sin 2t\} = \frac{s}{s^2+4} + \frac{2}{s^2+4}$

$Y(s) = F(s+3) = \frac{s+3}{(s+3)^2+4} + \frac{2}{(s+3)^2+4} = \frac{s+5}{s^2+6s+13}$

1.7. $F(s) = \mathcal{L}(f(t)) = \dfrac{s+4}{s^2+s}$

Slutvärdessatsen: $\lim_{t\to\infty} f(t) = \lim_{s\to 0} sF(s)$

$$\lim_{s\to 0} s\cdot\frac{s+4}{s^2+s} = \lim_{s\to 0}\frac{s+4}{s^2+1} = 4$$

Begynnelsevärdessatsen: $\lim_{t\to 0} f(t) = \lim_{s\to\infty} sF(s)$

$$\lim_{s\to\infty} s\,\frac{s+4}{s^2+s} = \lim_{s\to\infty}\frac{s+4}{s^2+1} =$$

$$= \lim_{s\to\infty}\frac{s}{s^2} = \lim_{s\to\infty}\frac{1}{s} = 0$$

Kan vi lita på s.v-satsen och b.v-satsen?

- s.v-satsen får användas endast då alla nollskillda poler till $F(s)$ ligger i VHP, d.v.s har strikt negativ realdel

Poler till $F(s)$: $s^2+s = 0 \Rightarrow s(s^2+1) = 0$

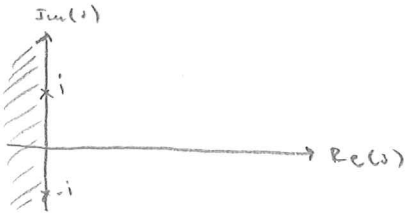
$\Rightarrow s(s+i)(s-i) = 0$

$s_1 = 0$

$s_2 = \pm i$

Poler har realdel 0

$\longrightarrow$ använd ej s.v.



$$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1} + \frac{4}{s(s^2+1)}\right) = [\text{PBU}] = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{s^2+1} - \frac{4s}{s^2+1} + \frac{4}{s}\right) =$$

$$= \sin(t) - 4\cos(t) + 4, \quad t > 0$$

$\lim_{t\to 0} f(t)$ = inget slutvärde, svänger i all oändlighet

1.10. Tre ämnen växelverkar enligt

$$\begin{cases} \dfrac{du_1}{dt} = u_2(t) - u_1(t) \\ \dfrac{du_2}{dt} = u_3(t) - u_2(t) \\ \dfrac{du_3}{dt} = u_1(t) - u_3(t) \end{cases}$$

Initialkoncentrationer är $u_1(0) = N$, $u_2(0) = 0$, $u_3(0) = N$

Bestäm koncentration av u_2 efter att växelverkan pågått under mycket lång tid.

eller

$$\lim_{t \to \infty} u_2(t) = \lim_{s \to 0} s N_2(s)$$

→ Slutvärdessatsen! Behöver $\mathcal{L}$-transform!

$\mathcal{L}$-transformera:

$$\begin{cases} sN_1(s) - \underbrace{u_1(0)}_{N} = N_2(s) - N_1(s) & (1) \\ sN_2(s) - \cancel{u_2(0)} = N_3(s) - N_2(s) & (2) \\ sN_3(s) - \underbrace{u_3(0)}_{N} = N_1(s) - N_3(s) & (3) \end{cases}$$

$$N_1(s) = \frac{N_2(s) + N}{s+1} \qquad (4)$$

(4) i (3): $sN_3(s) - N = \dfrac{N_2(s) + N}{s+1} - N_3(s)$

$$N_3(s) = \frac{N_2(s) + N}{(s+1)^2} + \frac{N}{s+1} \qquad (5)$$

(5) i (2): $sN_2(s) = \dfrac{N_2(s) + N}{(s+1)^2} + \dfrac{N}{s+1} - N_2(s)$

$$N_2(s)(s+1)(s+1)^2 = N_2(s) + N + N(s+1)$$

$$N_2(s)\underbrace{\left((s+1)(s+1)^2 - 1\right)}_{s(s^2+3s+3)} = N(s+2)$$

$$N_2(s) = \frac{N(s+2)}{s(s^2+3s+3)}$$

Får vi använda s.v? Studera poler!

$$s(s^2+3s+3) = 0$$

$$s_1 = 0$$

$$s_{2,3} = -3/2 \pm i\sqrt{\tfrac{3}{4}}$$ ⟶ slutvärde får användas

$$\lim_{s\to 0} sN_2(s) = \lim_{s\to 0} \frac{N(s+2)}{s^2+3s+3} = \lim_{s\to 0} \frac{Ns+2N}{s^2+3s+3} = \frac{2N}{3}$$

$$\lim_{t\to\infty} u_2(t) = \frac{2N}{3}$$

FÖRELÄSNING 3

Vad är reglerteknik?

- Modellering: för att kunna bestämma relationer (r och y till u) i en regulator måste vi ha en tillräckligt bra beskrivning (modell) av processen

- Syntes & design: utifrån modellen bestäms preliminär regulator

- Analys: analysera regulator + process

- Implementering: fastställd regulator kopplas till verklig process

Problem: bufferttank

1. Styrsignal $u(t) = P(t)$

   Mätsignal $y(t) = T(t)$

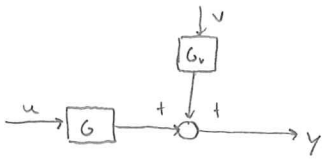
   Störning $v(t) = T_{in}(t)$

2. Fysikalisk modell: $\tau\dot{y} = -y + v + \frac{1}{\rho C_p Q} u$

   $\mathcal{L}$-transform av ODE ger:

$$Y(s) = \underbrace{\frac{1}{1+s\tau}}_{G_v(s)} V(s) + \underbrace{\frac{1/\rho C_p Q}{1+s\tau}}_{G(s)} U(s)$$

   Som blockschema:



3. Ansätt en PI-regulator: $P(t) = \underbrace{K_p\left(T_{ref}(t) - T(t)\right)}_{\text{proportionell}} + \underbrace{K_i \int_0^t \left(T_{ref}(\tau) - T(\tau)\right) d\tau}_{\text{integrerande}}$

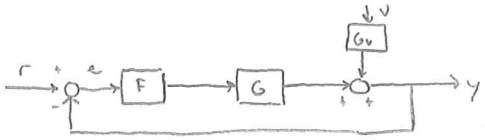
$$\Rightarrow u(t) = K_p(r-y) + K_i \int_0^t (r-y)\, d\tau$$

→ $\mathcal{L}$-transform ger

$$U(s) = K_p(R(s) - Y(s)) + K_i/s\,(R(s) - Y(s))$$

$$= \underbrace{\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)}_{F(s)}(R(s) - Y(s))$$

└ PI-regulator som överföringsfunktion



Kretsöverföring

Def: Kretsöverföring $L(s)$ är produkten av överföringsfunktionerna i en sluten slinga (återkopplingsloop)

Problem igen

Vi har: $\begin{cases} Y = G_v V + GU \\ U = FE = F(R-Y) \end{cases}$

$$Y = G_v V + GF(R-Y) \Rightarrow Y = \underbrace{\frac{G_v}{1+GF}}_{G_{vy}(s)} V + \underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{G_{ry}(s)} R$$

$G_{vy}(s)$ är öff från $v = T_{in}$ till $y = T$ för det återkopplade systemet, på samma sätt är $G_{ry}(s)$, osv....

Allmänt: öff från en signal w_1 till en annan signal w_2 för ett system med negativ (positiv) återkoppling är:

$$G_{w_1 w_2}(s) = \frac{\text{Produkten av blocken mellan } w_1 \text{ o } w_2}{1 \pm \text{kretsöverföring}}$$

- Är systemet stabilt?
  - Är G_{vy} och G_{ry} stabila?
  - Har G_{vy} och G_{ry} endast poler i VHP
  - Har $1 + L(s)$ endast nollor i VHP

$$1 + L(s) = 1 + GF = 1 + \frac{H}{1+s\tau}\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right) = 0$$

$$\Rightarrow 1 + s\tau + H\left(K_p + K_i/s\right) = 0$$

$$\Rightarrow s^2\tau + s\left(1 + HK_p\right) + HK_i = 0$$

$$s = -\frac{1}{2\tau}\left(1 + HK_p\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{1+HK_p}{\tau}\right)^2 - 4HK_i} \quad \in VHP$$

- Får vi önskad temperatur?

$$Y = G_{uy}V + G_{ry}R = Y_v + Y_R \iff y(t) = y_v(t) + y_r(t)$$

Vi önskar

$$\begin{cases} y_v(t) \longrightarrow 0 & \text{då } t \longrightarrow \infty \\ y_r(t) \longrightarrow T_{ref} & \text{då } t \longrightarrow \infty \end{cases}$$

då $V(t) = \Delta T_{in}\sigma(t)$ $\Rightarrow$ $V(s) = \frac{\Delta T_{in}}{s}$

$r(t) = \Delta T_{ref}\sigma(t)$ $\quad R(s) = \frac{\Delta T_{ref}}{s}$

SVS: $\lim_{t\to\infty} y_v(t) = \lim_{s\to 0} s \cdot Y_v(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} G_{uy}(s) \frac{\Delta T_{in}}{\cancel{s}} = G_{uy}(0)\Delta T_{in}$

$$G_{uy} = \frac{1/1+s\tau}{1 + \frac{H}{1+s\tau}\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)} = \frac{s}{s^2\tau + s(1+K_p) + HK_i}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y_v(t) = 0$$

SVS: $\lim_{t\to\infty} y_r(t) = \lim_{s\to 0} s\,Y_r(s) = \lim_{s\to 0} \cancel{s} G_{ry}(s) \frac{\Delta T_{ref}}{\cancel{s}} = G_{ry}(0)\Delta T_{ref}$

$$G_{ry} = \frac{H/1+s\tau\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)}{1 + H/1+s\tau\left(K_p + \frac{K_i}{s}\right)} = \frac{H(K_p s + K_i)}{s^2\tau + s(1+HK_p) + HK_i}$$

$$\Rightarrow \lim_{t\to\infty} y_r(t) = \Delta T_{ref}$$

∴ Inget kvarstående fel vid stegändringar i varken referens eller inkommande temperatur

Förklaring: $\frac{K_i}{s}$, dvs integralverkan i vår regulatorn

Fysikaliska modellering

1. Rita tydlig bild över systemet med variabler
2. Ställ upp balanser och kontrollera enheter (dimensionsanalys)
3. Bestäm:
   - insignaler (u, v), variabler som påverkar utifrån
   - utsignaler (y), variabler som mäts/studeras
   - tillstånd (x), beskriver upplagringar i systemet (M, T, m) måste ha tidsderivata
4. Skriv ekvationer på tillståndsform

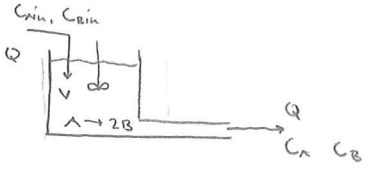
$$\left.\begin{aligned} \dot{x} &= f(x,u) = Ax + Bu \\ y &= g(x,u) = Cx + Du \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} \Delta\dot{x} &= A\Delta x + B\Delta u \\ \Delta y &= C\Delta x + D\Delta u \end{aligned}$$

5. Beräkna om så önskas en överföringsfunktion

$$G(s) = C[sI - A]^{-1}B + D$$

Exempel: linjär tillståndsmodell

Tankreaktor:



Sönderfall av A: $r = kC_A$ [mol/m³s]

Q, V konstanta.

$$\frac{d}{dt}(VC_A) = QC_{Ain} - QC_A - kVC_A$$

$$\frac{d}{dt}(VC_B) = QC_{Bin} - QC_B + 2kVC_A$$

$$\dot{C}_A = -\left(\frac{Q}{V} + k\right)C_A + \frac{Q}{V}C_{Ain}$$

$$\dot{C}_B = 2kC_A - \frac{Q}{V}C_B + \frac{Q}{V}C_{Bin}$$

På matrisform:

$$\begin{bmatrix} \dot{C}_A \\ \dot{C}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(Q/V + k) & 0 \\ 2k & -Q/V \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} Q/V & 0 \\ 0 & Q/V \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{Ain} \\ C_{Bin} \end{bmatrix}$$

$\dot{x}(t)$ $\quad A \quad$ $x(t)$ $\quad B \quad$ $u(t)$

$$C_B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_A \\ C_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_{Ain} \\ C_{Bin} \end{bmatrix}$$

$C \quad x(t) \quad D \quad u(t)$