Tillämpad matematik: bevis till tentamen 2012

August 30, 2013

1

Formulera och bevisa ”andra shift-lagen” för Laplacetransformer:

$$\mathcal{L}[f(t-T)\theta(t-T)] = e^{-Ts}F(s).$$

Sats:

Antag att $f(t-T) = 0$ om $t \leq T$. Då gäller att

$$\mathcal{L}[f(t-T)] = e^{-Ts}F(s).$$

Bevis:

Låt $\tau = t - T$. Då gäller

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[f(t-T)\theta(t-T)] = \\
&= \{\text{multiplikation med } \theta(f-T) \Rightarrow \text{funktionen noll för } t \leq T\} = \\
&= \int_0^\infty f(t-T)\theta(t-T)e^{-st}dt = \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(t-T)\theta(t-T)e^{-st}dt = \{\tau = t-T\} = \\
&= \int_{-\infty}^\infty f(\tau)\theta(\tau)e^{-s(\tau+T)}d\tau = e^{-Ts}\int_0^\infty e^{-s\tau}f(\tau)\theta(\tau)d\tau = \\
&= e^{-Ts}F(s)
\end{aligned}$$

där

$$\theta(\tau) = \begin{cases} 1 & t > T, \\ 0 & t < T. \end{cases}$$

QED

2

Verifiera följande Laplacetransformer:

a) $\mathcal{L}[f'(t)](s) = sF(s) - f(0)$,

b) $\mathcal{L}[f''(t)](s) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)$.

Bevis:

a)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f'(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f'(t)dt = \{PI\} = e^{-st}f(t)\mid_{t=0}^{\infty} - \int_0^\infty (-se^{st})f(t)dt = \\ = \lim_{t\to\infty} e^{-st} - e^0 f(0) + s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = \\ = \{\lim_{t\to\infty} e^{-st} = 0, \quad s\int_0^\infty e^{-st}f(t)dt = 0\} = sF(s) - f(0).\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f''(t)](s) = s\mathcal{L}[f'(t)] - f'(0) = \{a \Rightarrow\} = s(sF(s) - f(0)) - f'(0) = \\ = s^2F(s) - sf(0) - f'(0).\end{aligned}$$

QED

3

Visa att om funktionen f är periodisk med perioden P så är

$$\int_a^{a+P} f(x)dx$$

oberoende av a.

Bevis:

Låt

$$g(a) = \int_a^{a+P} f(x)dx = \int_0^{a+P} f(x)dx - \int_0^a f(x)dx.$$

$g'(a) = f(a + P) - f(a)$. Att f är periodisk med perioden P medför att $g'(a) = f(a) - f(a) = 0$ vilket innebär att $g(a) = \int_a^{a+p} f(x)dx$ är konstant och oberoende av a.

QED

4

Låt $f(x)$ vara en 2π-periodisk funktion. Visa att om

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx} \quad (*)$$

så är

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Bevis:

Multiplikation av $(*)$ med e^{-ikx} samt integration över $[-\pi, \pi]$ ger

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{inx}e^{-ikx}dx$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n-k)x}dx.$$

$\{e^{inx}\}_{-\infty}^{\infty}$ är en ortogonal mängd på $x \in [-\pi, \pi]$ vilket medför att

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n-k)x}dx = 0 \quad \text{om } n \neq k$$

och

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} C_n e^{i(n-k)x}dx = 2\pi \cdot C_k \quad \text{om } n = k$$

vilket i sin tur ger att

$$C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

QED

5

Visa att om funktionen f är 2π-periodisk och Riemannintegrerbar på $[-\pi,\pi]$ och C_n är de komplexa fourierkoefficienterna till f så är

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \qquad \text{(Bessels olikhet).}$$

Bevis:

Låt

$$S_n^f(x) = \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}$$

definiera den N:te partialsumman av fourierserien för $f(x)$. Då gäller att

$$|f(x) - S_n^f(x)|^2 = |f(x) - \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}|^2 = \{|z|^2 = z\bar{z}\} =$$

$$= \left(f(x) - \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}\right)\left(\bar{f}(x) - \sum_{n=-N}^{N} \bar{C}_n e^{-inx}\right) =$$

$$= |f(x)|^2 - \sum_{n=-N}^{N} (C_n \bar{f}(x) e^{inx} + \bar{C}_n f(x) e^{-inx}) + \sum_{n,m=-N}^{N} C_m \bar{C}_n e^{i(m-n)x}.$$

Division med 2π och integration från $-\pi$ till π ger

$$0 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - \sum_{n=-N}^{N} C_n e^{inx}|^2 dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\sum_{n=-N}^{N}\left(C_n \int_{-\pi}^{\pi} \bar{f}(x) e^{inx} + \bar{C}_n \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\right) +$$

$$+\frac{1}{2\pi}\sum_{n,m=-N}^{N} C_m \bar{C}_n \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(m-n)x} dx.$$

Ortogonalitet samt $C_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$ ger

$$0 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^{N} (C_n\bar{C}_n + \bar{C}_n C_n) + \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx - \sum_{n=-N}^{N} |C_n|^2.$$

$N \to \infty$ ger

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \le \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx.$$

QED

6

Formulera och bevisa Riemann-Lebesques sats.

Formulering:

Om $\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$ är ändlig så gäller att

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0, \quad \lim_{|n|\to\infty} C_n = 0.$$

Bevis:

Bessels olikhet säger att

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |C_n|^2 \leq \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx$$

(summan konvergerar) vilket medför att

$$C_n \to 0 \quad \text{om} \quad n \to \infty.$$

Då

$$a_n = C_n + C_{-n} \quad \text{och} \quad b_n = i(C_n - C_{-n})$$

gäller att

$$a_n \to 0 \quad \text{och} \quad b_n \to 0 \quad \text{om} \quad n \to \infty.$$

QED

7

Antag att $f \in \mathcal{C}^2(a,b)$. Visa att det finns en interpolationskonstant, C_i, oberoende av f och på intervallet (a,b) så att för linjärinterpolation, $\Pi_1 f$, har vi följande feluppskattning:

$$\|\Pi_1 f - f\|_{L_\infty(a,b)} \leq C_i (b-a)^2 \|f''\|_{L_\infty(a,b)} \quad (i).$$

Bevis:

Linjära interpolationen av (i) är

$$\Pi_1 f(x) = f(a)\lambda_a(x) + f(b)\lambda_b(x) \quad (\star).$$

Taylorutveckling av $f(a)$ och $f(b)$ kring $x \in (a,b)$ ger

$$\begin{cases} f(a) = f(x) + (a-x)f'(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2 f''(\eta_a), \\ f(b) = f(x) + (b-x)f'(x) + \frac{1}{2}(b-x)^2 f''(\eta_b), \end{cases}$$

där

$$\begin{cases} a < \eta_a < x, \\ x < \eta_b < b. \end{cases}$$

Multiplikation av $f(a)$ med $\lambda_a(x)$ och $f(b)$ med $\lambda_b(x)$ samt summering av dem ger att

$$\begin{aligned} \lambda_a(x)f(a) + \lambda_b(x)f(b) = (\lambda_a(x) + \lambda_b(x))f(x) \, + \\ + \, [(a-x)\eta_a(x) + (b-x)\lambda_b(x)]f'(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2\lambda_a(x)f''(\eta_a) \, + \\ + \, \frac{1}{2}(b-x)\lambda_b(x)f''(\eta_b). \end{aligned}$$

$(\star)$, $(a-x)\lambda_a(x) + (b-x)\lambda_b(x) = 0$ och att $\lambda_a(x) + \lambda_b(x) = 1$ ger att

$$\Pi_1 f(x) = f(x) + \frac{1}{2}(a-x)^2\lambda_a(x)f''(\eta_a) + \frac{1}{2}(b-x)^2\lambda_b(x)f''(\eta_b),$$

$$\Pi_1 f(x) - f(x) = \frac{1}{2}(a-x)^2\lambda_a(x)f''(\eta_a) + \frac{1}{2}(b-x)^2\lambda_b(x)f''(\eta_b).$$

Eftersom $a \leq x \leq b$ är $(a-x)^2 \leq (a-b)^2$, vilket ger att

$$\begin{cases} \lambda_a(x) \leq 1, \\ \lambda_b(x) \leq 1, \end{cases}$$

$$\begin{cases} f''(\eta_a) \le \|f''\|_{L_\infty(a,b)}, \\ f''(\eta_b) \le \|f''\|_{L_\infty(a,b)}, \end{cases}$$

$$|\Pi_1 f(x) - f(x)| \le \frac{1}{2}(a-b)^2 + \frac{1}{2}(a-b)^2,$$

$$\|\Pi_1 f(x) - f(x)\|_{L_\infty(a,b)} \le \frac{1}{2}(b-a)^2 \|f''\|_{L_\infty(a,b)}.$$

QED

8

Betrakta den partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} -\left(a(x)u'(x)\right)' = f, \quad 0 < x < 1, \quad \text{(PDE)}, \\ u(0) = u(1) = 0, \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(RV)}. \end{cases}$$

Verifiera att finitelementlösningen $U \in V_h^0$ är den bästa approximativa lösningen av (PDE)+(RV) i energinormen. (Visa att $\forall v \in V_h^0$.) Dvs visa att

$$\|(u-U)'\|_a \le \|(u-v)'\|_a \le C_i \|hu''\|_a$$

där

$$\|w\|_a = \left(\int_0^1 aw^2 dx\right)^{1/2}$$

med $V_h^0 :=$ {styckvis linjära och kontinuerliga v med $v(0) = v(1) = 0$}.

Bevis:

$$\text{(VF)} \quad \int_0^1 a(x)u'(x)v'(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx, \quad \forall v \in H_0^1.$$

Ta ett godtyckligt $v \in V_h^0$. Energinormens definition ger då att

$$\|u - u_h\|_E^2 = \int a(x)(u'(x) - u_h'(x))^2 dx =$$

$$= \int_0^1 a(x)(u'(x) - u_h'(x))(u'(x) - v'(x) + v'(x) - u_h'(x))dx =$$

$$= \int_0^1 a(x)(u'(x) - u_h'(x))(u'(x) - v'(x))dx +$$

$$+ \int_0^1 a(x)(u'(x) - u_h'(x))(v'(x) - u_h'(x))dx.$$

Genom galerkinortogonalitet är sista integralen 0. Eftersom $v - u_h \in V_h^0 \subset H_0^1$ kan (VF) skrivas som

$$\int_0^1 a(x)u'(x)(v'(x) - u_h'(x))dx = \int f(x)(v(x) - u_h(x))dx \quad (*),$$

vars (FEM) formuleras enligt

$$\int_0^1 a(x)u_h'(x)(v'(x) - u_h'(x))dx = \int f(x)(v(x) - u_h(x))dx \quad (**).$$

Subtrahera $(**)$ från $(*)$ vilket ger

$$\begin{aligned}
\|u - u_h\|_E^2 = \int_0^1 a(x)(u'(x) - u_h'(x))(u'(x) - v'(x))dx = \\
= \int_0^1 (a(x))^{\frac{1}{2}}(u'(x) - u_h'(x))(a(x))^{\frac{1}{2}}(u'(x) - u_h'(x))dx \leq \\
\leq \{\text{Cauchy-Schwarz-olikhet}\} \leq \\
\leq \left(\int_0^1 a(x)(u'(x) - u_h'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^1 a(x)(u'(x) - v'(x))^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} = \\
= \|u - u_h\|_E \cdot \|u - v\|_E.
\end{aligned}$$

Division med $\|u - u_h\|_E$ ger

$$\|u - u_h\|_E \leq \|u - v\|_E$$

QED

9

Betrakta randvärdesproblemet

$$\text{(BVP)} \quad \begin{cases} -\left(a(x)u'(x)\right)' = f, \quad 0 < x < 1, \quad \text{(PDE)}, \\ u(0) = u(1) = 0 \qquad\qquad\qquad\qquad \text{(RV)}. \end{cases}$$

Ange en variationsformulering, (VF), och ett minimeringsproblem, (MP), för (BVP) och visa att

$$\text{(BVP)} \Leftrightarrow \text{(VF)} \Leftrightarrow \text{(MP)}.$$

Bevis:

$$\text{(VF):} \quad -\int_0^1 (a(x)u'(x))'v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

Partiell integration av vänsterledet ger

$$\int_0^1 a(x)u'(x)'v(x)dx - [a(x)u'(x)v(x)]_0^1 = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Randdata och $a(1)u'(1) = g_1$ ger

$$\int_0^1 a(x)u'(x)'v(x)dx - g_1 v(1) = \int_0^1 f(x)v(x)dx.$$

Låt $\tilde{H}_0^1 := \{v : \int v(x)^2 + v'(x)^2 dx < \infty, v(0) = 0\}$.
(VF): Hitta $u(x) \in H_0^1$ så att

$$\int_0^1 a(x)u'(x)'v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx + g_1 v(1), \forall v \in \tilde{H}_0^1.$$

Visar att (BVP) $\Leftrightarrow$ (VF): Partialintegration av (VF) i vänsterled ger

$$\begin{aligned} -\int_0^1 (a(x)u'(x))'v(x)dx + [a(x)u'(x)v(x)]_0^1 = \\ = \int f(x)v(x)dx + g_1 v(1), \forall v \in \tilde{H}_0^1. \end{aligned}$$

Val av $v \in \tilde{H}_0^1$ så att $v(1) = 0$ medför

$$\text{(VF):} \quad -\int_0^1 (a(x)u'(x))'v(x)dx = \int_0^1 f(x)v(x)dx$$

vilket ger att

$$\int_0^1 [-(a(x)u'(x))' - f(x)]v(x)dx = 0, \forall v \in H_0^1.$$

Antag att ovanstående ekvation antyder att

$$-(a(x)u'(x))' - f(x) \equiv 0, \forall x \in (0,1).$$

Om inte existerar det minst en punkt, $\xi \in (0,1)$, så att

$$-(a(\xi))u'(\xi))' - f(\xi) \neq 0$$

vilket innebär att

$$-(a(\xi))u'(\xi))' - f(\xi) > 0 \quad (\text{eller} < 0).$$

Genom $f(x) \in \mathcal{C}(0,1)$ och $a \in \mathcal{C}^1$ vilket genom kontinuitet ger att

$$g(x) := -(a(x)u'(x))' - f(x) > 0, \forall x \in (\xi - \delta, \xi + \delta).$$

Testfunktionen $v(x)$ som hattfunktionen $v^*(x) > 0$ {med $v(\xi) = 1$ på stödet $I_\delta := (\xi - \delta, \xi + \delta)$} ger att $v^*(x) \in H_0^1$ samt att

$$\int_0^1 (-(a(x)u'(x))' - f(x))v^*(x)dx = \int_{I_\delta} g(x)v^*(x) > 0$$

då $g(x) > 0$ och $v^*(x) > 0$ motsäger påståendet ovan så satisfierar $u(x)$ (BVP).

(MP): Finn $u(x) \in H_0^1$ så att $F(u(x)) \leq F(w(x)), \forall w(x) \in H_0^1$ där

$$F(w(x)) = \frac{1}{2}\int_0^1 a(x)(w'(x))^2 dx - \int_0^1 f(x)w(x)dx.$$

Bevisar att (MP)$\Leftarrow$(VF)

Låt $v = w - u$, så $v \in H_0^1$ och

$$F(w) = F(u+v) = \frac{1}{2}\int_0^1 a((u+v)')^2 dx - \int_0^1 f(u+v)dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int_0^1 2au'v'dx + \frac{1}{2}\int_0^1 a(u')^2 dx + \frac{1}{2}\int_0^1 a(v')^2 dx - \int_0^1 fudx - \int_0^1 fvdx.$$

Enligt (VF) är sista integralen subtraherat från första integralen noll. Definitionen för F ger att fjärde integralen subtraherat från andra integralen är $F(u)$. Alltså

$$F(w) = F(u) + \frac{1}{2}\int_0^1 a(x)(v'(x))^2 dx.$$

Eftersom $a(x) > 0$ är $F(w) \leq F(u)$.

Bevisar att (MP)$\Rightarrow$(VF). Låt $F(u) \leq F(w)$ och sätt $g(\epsilon, w) = F(u + \epsilon v)$ för en godtycklig funktion $v \in H_0^1$. (MP) ger då att

$$F(w) = F(u) + \frac{\partial}{\partial \epsilon} g(\epsilon, v)\bigg|_{\epsilon=0} = 0$$

där

$$g(\epsilon, v) = F(u + \epsilon v) = \frac{1}{2}\int_0^1 a(a(u+\epsilon v)')^2 dx - \int_0^1 f(u + \epsilon v) dx =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^1 (a(u')^2 + a\epsilon^2 (v')^2 + 2a\epsilon u'v') dx - \int_0^1 fudx - \epsilon \int_0^1 fvdx.$$

Derivering ger

$$g'_\epsilon(\epsilon, v) = \frac{1}{2}\int_0^1 (2a\epsilon(v')^2 + 2au'v') dx - \int_0^1 fvdx.$$

Då

$$g'_\epsilon\big|_{\epsilon=0} = 0$$

är

$$\int_0^1 au'v'dx - \int_0^1 fvdx = 0$$

vilket är (VF) vilket medför att om (VF)$\Leftrightarrow$(V) så är (BVP)$\Leftrightarrow$(VF)$\Leftrightarrow$(MP)

QED

10

Formulera och bevisa Poincares olikhet.

Sats:

Antag att u och u' är jämnt integrerbara funktioner på ett intervall, $[0, L]$. Då existerar det en konstant C_L, oberoende av u men beroende av L, sådan att om $u(0) = 0$ så är

$$\int_0^L u(x)^2 dx \leq C_L \int_0^L u'(x)^2 dx$$

vilket med andra ord innebär att

$$\|u\|_{L_2} \leq \sqrt{C_L} \|u'\|_{L_2(0,L)}.$$

Bevis:

$$\left(L_2\text{-normen är } \|f\|_{L_2(0,L)} = \sqrt{\int_0^L f(x)^2 dx.} \right)$$

För godtyckligt $x \in [0, L]$ är

$$\begin{aligned} u(x) = \int_0^x u'(y) dy \leq \int_0^x |u'(y)| dy = \int_0^x |u'(y)| \cdot 1 dy \leq \\ \leq \{\text{Cauchy-Schwartz-olikhet }\} \leq \\ \leq \sqrt{\int_0^x |u'(y)|^2 dy} \sqrt{\int_0^x 1^2 dy} \leq \\ \leq \sqrt{\int_0^L |u'(y)|^2 dy} \sqrt{\int_0^L 1^2 dy} = \sqrt{L} \sqrt{\int_0^L |u'(y)|^2 dy}. \end{aligned}$$

Eftersom

$$\int_0^L u(x)^2 dx \leq \int_0^L \left(L \int_0^L |u'(y)|^2 dy \right) dx = L^2 \int_0^L |u'(x)|^2 dx$$

är

$$\|u\|^2_{L_2(0,L)} \leq L^2 \|u'\|^2_{L_2(0,L)}$$

där $C_L = L^2$

QED

11

Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = f(x), \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsolikheter:

a) $\|u(\cdot,t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(\cdot,s)\| ds,$

b) $\|u_x(\cdot,t)\|^2 \leq \|u_0'\|^2 + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2 ds.$

Bevis:

a)

Multiplikation med $u(x,t)$ och integreration från 0 till 1 med avseende på x ger

$$\int_0^1 \dot{u}u dx - \int_0^1 u''u dx = \int_0^1 fu dx.$$

Partiell integration där $[u'u]_{x=0}^{x=1} = 0$ samt $\int_0^1 \dot{u}u dx = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx$ ger

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 u'u' dx = \int_0^1 fu dx.$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\|^2 + \|u'(\cdot,t)\|^2 \leq \ \{\text{C-S}\} \leq \|f\|\|u\|.$$

$$\frac{1}{2}2\|u(\cdot,t)\|\|\dot{u}(\cdot,t)\| + \|u'(\cdot,t)\|^2 \leq \|f\|\|u\|.$$

$$\{\|f\|\|u\| = \|f(\cdot,t)\|\|u(\cdot,t)\|\}$$

$$\|u(\cdot,t)\|\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\| \leq \|f(\cdot,t)\|\|u(\cdot,t)\|.$$

$$\frac{d}{dt}\|u(\cdot,t)\| \leq \|f(\cdot,t)\|.$$

Byte av $t = s$ och integration från 0 till t med avseende på s ger

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\|u(\cdot,s)\|ds \leq \int_0^t \|f(\cdot,s)\|ds.$$

$$[\|u(\cdot,s)\|]_{s=0}^{s=t} \leq \int_0^t \|f(\cdot,s)\|ds.$$

$$\|u(\cdot,t)\| - \|u(\cdot,0)\| \leq \{\|u(\cdot,0)\| = \|u_0\|\} \leq \int_0^t \|f(\cdot,s)\|ds \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|u(\cdot,t)\| \leq \|u_0\| + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|ds.$$

QED

b) Multiplikation av DE med $\dot{u}(x,t) = \frac{d}{dt}u(x,t)$ och integration från 0 till 1 med avseende på x ger

$$\int_0^1 \dot{u}\dot{u}dx - \int_0^1 u''\dot{u}dx = \int_0^1 f\dot{u}dx.$$

Partialintegration samt randvillkor, $u(0,t) = 0 \Rightarrow \dot{u}(0,t) = 0$, ger

$$\|\dot{u}\|^2 + \int_0^1 u'\dot{u}'dx - [u'\dot{u}]_{x=0}^{x=1} = \int_0^1 f\dot{u}dx,$$

$$\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (u')^2dx = \int_0^1 f\dot{u}dx$$

där

$$\int_0^1 f\dot{u}dx \leq \ \{\text{Cauchy-Schwartz}\} \leq \|f\|\|\dot{u}\| \leq \frac{1}{2}\|f\|^2 + \frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 \leq$$

$$\leq \{\|f\| = a, \|\dot{u}\| = b\} \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2, \quad 2ab \leq a^2 + b^2 \Leftrightarrow a^2 + b^2 - 2ab = 0.$$

$$\|\dot{u}\|^2 - \frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u'\|^2 \leq \frac{1}{2}\|f\|^2.$$

$$\frac{d}{dt}\|u'\|^2 \leq \|f\|^2.$$

Byte av $t = s$ och integration från 0 till t med avseende på s ger

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\|u'(\cdot,s)\|^2 ds \leq \int_0^t \|f(\cdot,s)\|ds,$$

$$[\|u'(\cdot,s)\|^2]_{s=0}^{s=t} \leq \int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2 ds$$

vilket ger att

$$\|u'(\cdot,t)\|^2 \leq \|u_0'\|^2 + \int_0^t \|f(\cdot,s)\|^2 ds.$$

QED

12

Betrakta partiella differentialekvationen

$$\begin{cases} \dot{u} - u'' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad u(x,0) = u_0(x). \end{cases}$$

Visa följande stabilitetsolikheter

a) $\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u'\|^2 = 0$

b) $\|u(\cdot,t)\| \le e^{-t}\|u_0\|$.

Bevis:

a)

Multiplikation av (DE) med lösningen u och integration över $x \in (0,1)$ ger

$$0 = \int_0^1 (\dot{u}u - u''u)dx = \int_0^1 \dot{u}u dx - \left(u'u \,|_{x=0}^1 = -\int_0^1 (u')^2 dx \right) =$$
$$= \{u'u \,|_{x=0}^1 = 0\} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx + \int_0^1 (u')^2 dx =$$
$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u\|^2 + \|u'\|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 0 = \frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u'\|^2$$

b)

Användning av *a)* tillsammans med *Poncares olikhet*: Sätt $L = 1$ alltså $\|u\| \le \|u'\|$, då gäller att

$$0 = \frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u'\|^2 \ge \frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u\|^2.$$

Multiplikation med integrerande faktorn, e^{2t}, ger

$$\frac{d}{dt}\left(\|u\|^2 e^{2t}\right) = \left(\frac{d}{dt}\|u\|^2 + 2\|u\|^2\right) e^{2t} \le 0$$

Substitution av t med s samt integration från 0 till t med avseende på s ger

$$\int_0^t \frac{d}{ds}\left(\|u\|^2 e^{2s}\right) ds = \|u(\cdot,t)\|^2 e^{2t} - \|u(\cdot,0)\|^2 \leq 0 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \|u(\cdot,t)\|^2 \leq e^{-2t}\|u_0\|^2 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \|u(\cdot,t)\| \leq e^{-t}\|u_0\|$$

QED

13

Betrakta följande 1-dimensionella vågekvation:

$$\begin{cases} \ddot{u} - u'' = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \\ u(x,0) = u_0(x), \quad \dot{u}(x,0) = v_0(x) \end{cases}$$

Då är den totala energin är konstant (konservering av energin). Det vill säga att

$$\frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}\|u'\|^2 = \frac{1}{2}\|v\|^2 + \frac{1}{2}\|u_0'\|^2 = konstant.$$

Bevis:

Multiplikation med $\dot{u}$ och integration från 0 till 1 med avseende på x ger

$$\int_0^1 \ddot{u}\dot{u}dx - \int_0^1 u''\dot{u}dx = 0.$$

Partialintegration och $\ddot{u}\dot{u} = \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{u})^2$ ger

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\frac{d}{dt}(\dot{u})^2 dx + \int_0^1 u'\dot{u}dx - \left[u'(x,t)\dot{u}(x,t)\right]_{x=0}^{x=1} = \{BV\} =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (\dot{u})^2 dx + \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 (u')^2 dx = \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2 + \frac{1}{2}\|u'\|^2\right) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}\|\dot{u}\|^2\frac{1}{2}\|u'\|^2 = C \quad \text{(konstant)}$$

QED