FÖRELÄSNING 8

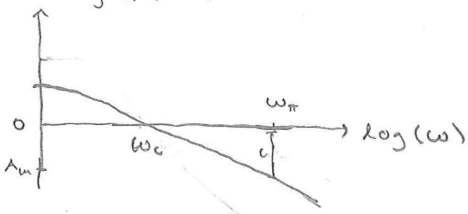
Stabilitet

	L stabil		L instabil	
	rationell	ej	rationell	ej
NQ enkel	x	x	-	-
NQ fullst.	onödig	onödig	x	x
RH	x	-	x	-

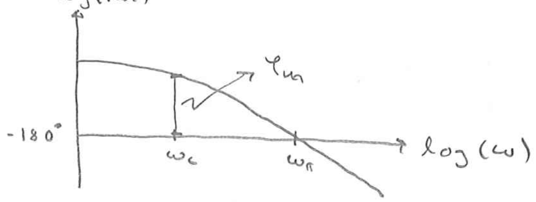
Mer om stabilitet i föreläsningsanteckningar!

Bodediagram

I ett s.k. Bodediagram kan A_m och φ_m enkelt avläsas!



Avläsning på y-axel där ω_π skär kurvan



Korsar negativ realaxel i ω_π

Avstånd mellan x-axel och ω_c ger φ_m

Värden fås från Nyquistdiagram!

$$A_m = \frac{1}{L(j\omega_\pi)} \Rightarrow A_m^{(dB)} = \underbrace{20\log(1)}_{0} - 20\log(|L(j\omega_\pi)|) = 20\log(A_m)$$

Typiskt vill man ha: $A_m \in [2, 3]$

$\varphi_m \in [30°, 60°]$

beroende på hur säker man är på sin modell och på hur man vill det å.k.s. ska bete sig!

OBS! Modellen är alltid fel! Vill ha stor marginal

Minimumfas-system

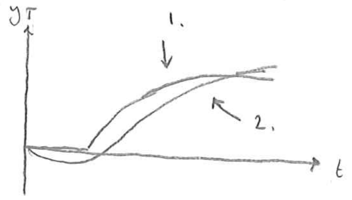
System som för en given beloppskurva (den övre i Bodediagrammet) har den minsta negativa fasvridningen.

Icke-minimumfas-system

Ej minimumfas-system!

I praktiken är minfas-system rationella öf.f. där alla poler och nollställen ligger i VHP.

Icke-minfas:
1. System med dötid
2. System med nollställen i HHP



(ex. flygplan)

1. $G = e^{-sT_d} \cdot \tilde{G}(s)$ där $\tilde{G}(s)$ är minfas

$$|G(j\omega)| = \underbrace{|e^{-sT_d}|}_{=1} |\tilde{G}(j\omega)|$$

$$\arg(G(j\omega)) = -\omega T_d + \arg(\tilde{G}(j\omega))$$

2. $G = \dfrac{1-sT}{1+sT}\tilde{G}(s)$

$$|G(j\omega)| = \frac{|1+(-\omega T)^2|}{|1+(\omega T)|^2} |\tilde{G}(j\omega)|$$

$$\arg(G(j\omega)) = \arctan(-\omega T) - \arctan(\omega T) + \arg(\tilde{G}(j\omega))$$
$$= -2\arctan(\omega T) + \arg(\tilde{G}(j\omega))$$

ÖVNING 6

4.1.

Rita Bode för

a) $G(s) = \dfrac{2(1+\frac{s}{0,5})}{s(1+\frac{s}{4})}$

Bodediagram: $|G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(|G(j\omega)|)$ beloppskurva

$\arg(G(j\omega))$ argumentkurva

Frekvensfunktionen: $G(j\omega) = \dfrac{2(1+\frac{j\omega}{0,5})}{j\omega(1+j\frac{\omega}{4})} \triangleq \dfrac{C_1(j\omega)C_2(j\omega)}{D_1(j\omega)D_2(j\omega)}$

Där: $C_1(j\omega) = 2 \qquad C_2(j\omega) = 1 + \frac{j\omega}{0,5}$

$D_1(j\omega) = j\omega \qquad D_2(j\omega) = 1 + j\frac{\omega}{4}$

Varje del kan tas för sig! (Det "fina" med Bode)

$\Rightarrow \quad |G(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\dfrac{C_1 C_2}{D_1 D_2}\right) = 20(\log(|C_1|) + \log(|C_2|) - \log(|D_1|) - \log(|D_2|))$

$\operatorname{Arg}(G(j\omega)) = \arg(C_1) + \arg(C_2) - \arg(D_1) - \arg(D_2)$

$|C_1(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(2) = 6 \text{ dB}$ (konstant term)

$-|D_1(j\omega)|_{dB} = -20 \cdot \log(|j\omega|) = -20 \cdot \log(\omega) = -20 \text{ dB/dekad}$

$|C_2(j\omega)|_{dB} = 20\log\left(\left|1 + \frac{j\omega}{0,5}\right|\right) = 20 \cdot \log\left(\sqrt{1 + (\frac{\omega}{0,5})^2}\right)$

För $\omega \ll 0,5 \Rightarrow |C_2(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log(1) = 0 \text{ dB}$

För $\omega \gg 0,5 \Rightarrow |C_2(j\omega)|_{dB} = 20 \cdot \log\left(\frac{\omega}{0,5}\right) =$

$= 20(\log(\omega) - \log(0,5))$

$= +20 \text{ dB/dekad}$ + lutning

$$-|D_2(j\omega)|_{dB} = -20\log\left(\left|1+\frac{j\omega}{4}\right|\right) = -20\log\left(\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{4}\right)^2}\right)$$

För $\omega \ll 4 \Rightarrow -20\log(1) = 0$ dB

För $\omega \gg 4 \Rightarrow -20\left(\log\left(\frac{\omega}{4}\right)\right) = -20(\log(\omega) - \log(4))$

$=$ lutning -20 dB/dekad

Hur kommer lutningen se ut? Summera bidrag!

$C_1(j\omega)$ och $D_1(j\omega)$ har ingen brytningsfrekvens

$\Rightarrow$ Lågfrekvensassymptot (LF) $= C_1/D_1$

ω	lutning
$0<\omega<0.5$	-20 dB/dekad (från LF)
$0,5<\omega<4$	$-20+20=0$ dB/dekad (från C_2 och D_1)
$4<\omega$	$-20+20-20=-20$ dB/dekad (från C_2, D_1 och D_2)

Var skär LF-asymptoten ω-axeln? (Behöver en punkt)

$$|G(j\omega)|_{LF,dB} = \left|\frac{C_1(j\omega)}{D_1(j\omega)}\right|_{dB} = 0$$

$$20\log\left(\frac{2}{j\omega}\right) = 0 \Rightarrow \omega = 2 \text{ rad/s}$$

Till Bode:
1. LF-asymptot
2. Lutning 1
3. Lutning 2

$\Rightarrow$ Asymptoten (men: punkter nära 0,5 och 4 stämmer inte Bode! $\Rightarrow$ kompensera)

Kompensation:

		ω (rad/s)	Kompensationer (dB)	
(C_2)	från 1:a ordn. term i täljare	$\frac{\omega_{b1}}{2} = 0,25$	+1 dB	Alltid för 1:a ordn. i t
		$\omega_{b1} = 0,5$	+3 dB	
		$2\omega_{b1} = 1$	+1 dB	
(D_2)	från 1:a ordn. term i nämnare	$\omega_{b2}/2 = 2$	−1 dB	Alltid för 1:a ordn. i n
		$\omega_{b2} = 4$	−3 dB	
		$2\omega_{b2} = 8$	−1 dB	

=> Ett korrigerat diagram fås (tre vutor, en dubblering)

Faskurva: $\arg(G(j\omega)) = \arg\left(\dfrac{2(1+\frac{j\omega}{0,5})}{j\omega(1+\frac{j\omega}{4})}\right) = \arg(2) + \arg(1+j\omega/0,5) -$

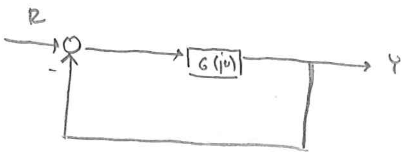
$- \arg(j\omega) - \arg(1+\frac{j\omega}{4}) =$

$= 0° + \arctan\left(\frac{\omega}{0,5}\right) - 90° - \arctan\left(\frac{\omega}{4}\right)$

ω	$\arg(G(j\omega))$
0	-90°
0.1	-80°
0.2	-71°
0.5	-52°
1.0	-41°
1.5	-39°
2.0	-41°
5.0	-52°
10.0	-71°
∞	-90°

En ruta = 10°

Plotta ut!



Två parametrar av intresse:

ω_c och φ_m

$|G(j\omega)| = 1 = 0$ dB

$\arg(G(j\omega)) = -180° + \varphi_m$

ω_π och A_m

$\arg(G(j\omega)) = -180°$ (självsvängningsfrekvens)

$|G(j\omega)| \cdot A_m = 1$

$\Rightarrow A_m = \dfrac{1}{|G(j\omega)|}$ (Amplitudmarginal)

Bode: $\omega_c = 14$ rad/s

$\varphi_m = 97°$

Inget ω_π! Ingen självsvängningsfrekvens! Blir inte instabil!

$A_m = \infty$

4.1.

a) $G(s) = \dfrac{80}{s^2+2s+16}$

$G(j\omega) = \dfrac{80}{(j\omega)^2+2j\omega+16}$ → Andragradare

$\underbrace{s^2+2s+16}$ vill stå på $\underbrace{1+2\zeta Ts+s^2T^2}$

$G(s) = \dfrac{80}{16\left(\frac{s^2}{16}+\frac{2s}{16}+1\right)} = \dfrac{5}{1+2\underbrace{\frac{1}{4}}_{\zeta}\cdot\underbrace{\frac{1}{4}}_{T}s+\underbrace{\left(\frac{1}{4}\right)^2}_{T^2}s^2}$

Brytfrekvenser: $\frac{1}{T} = 4 = \omega_b$ (rad/s)

Bestäm LF-asymptot: $|G(j\omega)|$ för $\omega \ll \omega_b$

$|G(j\omega)|_{LF,dB} = 20\cdot\log\left(\frac{5}{1}\right) =$

$= 14$ dB

Konstant term! Ingen skärningspunkt!
Beror ej av ω.

Lutningen: $\omega \gg \omega_b$ $\quad -20\cdot\log(\omega^2T^2) =$

$= -20\cdot 2\cdot(\log(\omega)+\log(T))$

$\Rightarrow$ lutning $= -40$ dB/dekad

Kompensation (klurigt!): Olika pga ζ!

$\zeta = \frac{1}{4} = 0{,}25$

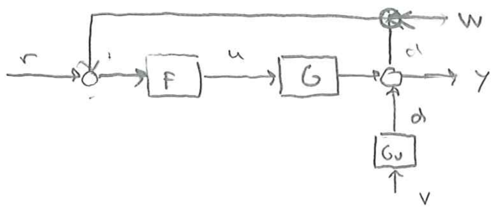
ω_b	komp
$\omega_b/2 = 2$	+ 1 dB
$\omega_b = 4$	+ 6 dB
$2\omega_b = 8$	+ 1 dB

Från diagram!

FÖRELÄSNING 9

Kvarstående fel

Exempel: uppvärmningstank från F3



$$V = T_m$$

$$u = P$$

$$G = \frac{1/\rho c_p Q}{1 + s\frac{V}{Q}}$$

$$G_v = \frac{1}{1 + s\frac{V}{Q}}$$

$$Y(s) = T(s)R(s) + S_v(s)V(s) + T(s)W(s)$$

(OBS! T är inte temp, standard för $u \to y$)

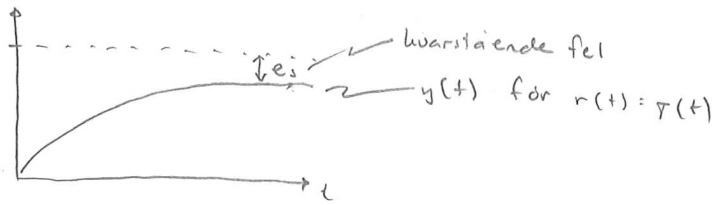
där $T(s) = \dfrac{L(s)}{1 + L(s)}$ $(L(s) = F(s)G(s))$

Komplementär känslighetsfunktion

$$S_v(s) = \frac{G_v(s)}{1 + L(s)}$$ störkänslighetsfunktion

$$S(s) = \frac{1}{1 + L(s)}$$ (mycket vanligare) känslighetsfunktion ($d \to y$)

Statisk onogrannhet (eller kvarstående fel) är t.ex:



$$e_s = \lim_{t\to\infty} e(t) = \lim_{t\to\infty}(r(t) - y(t)) = \lim_{s\to 0}(R(s) - Y(s))s$$

pga s.v.s.

Exempel: Ändrat börvärde $(r = \Gamma,\ v = w = 0)$

$$e_s = \lim_{s \to 0} s\left(\frac{1}{s} - T(s)\frac{1}{s}\right) = 1 - T(0)$$

$\therefore\ T(0) = 1 \Rightarrow$ Inget kvarstående fel!

OBS! Antas stabilt (därav s.v.s)

Exempel: Stegformad processtörning $(v = \Gamma,\ r = w = 0)$

$$e_s = \lim_{s \to 0} s\left(-S_v(s)\cdot\frac{1}{s}\right) = -S_v(0)$$

$\therefore\ S_v(0) = 0 \Rightarrow$ Inget kvarstående fel

Exempel: Stegformad mätstörning $(w = \Gamma,\ r = v = 0)$

$$e_s = \lim_{s \to 0} s\left(-T(s)\frac{1}{s}\right) = -T(0)$$

$\therefore\ T(0) = 0 \Rightarrow$ Inget kvarstående fel

Alltid fel om $T(0) \neq 0$

OBS! Vi ville ha $T(0) = 1$!

PID-regulator

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int_0^t e(\tau)\,d\tau + K_d \frac{de(t)}{dt}$$

Proportionell — Integrerande — Deriverande

$$U(s) = \underbrace{E(s)\left(K_p + \frac{K_i}{s} + K_D \cdot s\right)}_{F(s)}$$

Alternativt: $F(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d\right)$

P: Lyft på tårna

I: Kompensera över tid

D: Använder att vi vet vart vi är på väg

Exempel: slå huvudet i tavlan!

P-regulator ($F = K_p$)

$$T(0) = \frac{K_p G(0)}{1 + K_p G(0)} \neq 1 \quad \text{om} \quad G(0) < \infty$$

$$S_v(0) = \frac{G_v(0)}{1 + K_p G(0)} \neq 0 \quad \text{om} \quad \begin{array}{l} G_v(0) \neq 0 \\ G(0) < \infty \end{array}$$

Uppvärmningstanken: $G(0) = \frac{1}{\rho C_p Q}$, $G_v(0) = 1$

$\Rightarrow$ kvarstående fel

PI-regulator

$$F(s) = K_p + \frac{K_i}{s}$$

$$T(s) = F(s)G(s) = \frac{(K_p + \frac{K_i}{s})G(s)}{1 + (K_p + \frac{K_i}{s})G(s)} = \frac{(K_p s + K_i)G(s)}{s + (K_p s + K_i)G(s)}$$

$$\Rightarrow \quad T(0) = \frac{K_i G(0)}{K_i G(0)} = 1$$, inget kvarstående fel

$$S_v(s) = \frac{s G_v(s)}{s + (K_p s + K_i)G(s)}$$

$$\Rightarrow \quad S_v(0) = 0 \quad \text{om} \quad \begin{array}{l} G(0) \neq 0 \\ G_v(0) < \infty \end{array}$$

Hade varit najs, varför inte alltid PI?

$$\text{Arg}(L(j\omega)) = \arg\left(K_p + \frac{K_i}{j\omega}\right) + \arg(G(j\omega)) =$$

$$= \arg(K_p j\omega + K_i) - \arg(j\omega) + \arg(G(j\omega))$$

$$= \underbrace{\underbrace{\arctan\left(\frac{K_p}{K_i}\omega\right)}_{>0^\circ,\ <90^\circ \text{ (ligger i första kvadranten)}} - 90^\circ}_{<0^\circ \text{ (vinkelbidrag)}} + \arg(G(j\omega))$$

$\rightarrow$ flyttar sig närmre -1 $\rightarrow$ mer instabil

∴ I-verkan ⇒ normalt inget kvarstående fel, men försämrad fasmarginal

TEAM HEDDA

PID-regulator

$$F = K_p + \frac{K_i}{s} + K_d s$$

$T(0) = \dots = 1$

$S_v(0) = \dots = 0$

(samma som innan)

$$\arg(L(j\omega)) = \arg\left(K_p + \frac{K_i}{j\omega} + K_d j\omega\right) + \arg(G(j\omega))$$

$$= \underbrace{\arg\left(K_i - K_d\omega^2 + K_p j\omega\right) - \arg(j\omega)}_{> 90^\circ \text{ om } K_d > \frac{K_i}{\omega^2}} + \arg(G(j\omega))$$

∴ D-verkan förbättrar fasmarginalen

Sammanfattning regulator

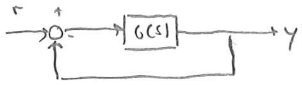
- P: + enkel
  - dålig statisk noggrannhet (om r = konst, oftast $r \neq y$)
- PI: + god statisk noggrannhet (om r = konst, oftast $r = y$)
  - \+ långsamma processtörningar regleras bort bra
  - \- försämrade stabilitetsmarginaler
- D-verkan: + förbättrad stabilitet
  - \+ snabbare möjlig reglering
  - \- ökad känslighet för mätstörningar

ÖVNING 7

4.2.a

a) $G(s) = \dfrac{s+2}{s^2}$

Är det å.k. systemet stabilt? Kan nyquists förenklade användas?



Förenklat kan användas om inga poler i HHP!

Titta på $G(s)$ poler: $s^2 = 0$ $s_1, s_2 = 0$

$\Rightarrow$ Ingen pol i HHP!

Använd Nyquists förenklade!

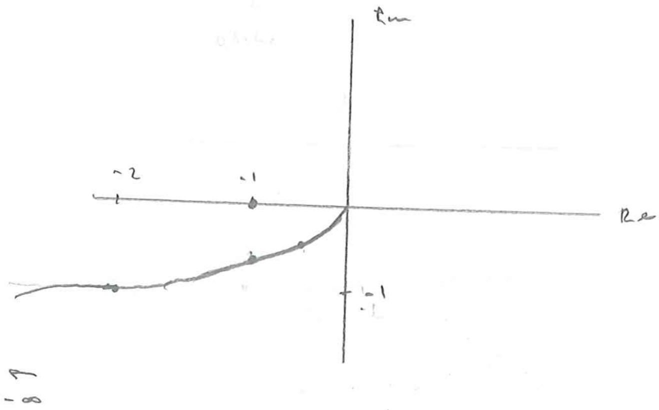
Plotta $G(j\omega)$ i komplexa talplanet:

$s = j\omega$; $\omega = 0 \longrightarrow \infty$

$$G(j\omega) = \frac{j\omega + 2}{(j\omega)^2} = -\frac{j\omega + 2}{\omega^2} = -\frac{j\omega}{\omega^2} - \frac{2}{\omega^2} = -\underbrace{\frac{j}{\omega}}_{Im(G)} - \underbrace{\frac{2}{\omega^2}}_{Re(G)}$$

Tabell över ω:

ω:	0	1	$\sqrt{2}$	2	∞
Re:	$-\infty$	-2	-1	$-1/2$	0
Im:	$-\infty$	-1	$-0{,}707$	$-1/2$	0



Hur förhåller sig kurvan till $Re(G(j\omega)) = -1$?

Å.k. stabilt! Detta pga att $G(j\omega)$ skär realaxeln till höger om $(-1, j\omega)$

4.3.b

b) Rita Nyquistkurvan för

$$G(s) = \frac{2+s}{s(2-s)}$$ (polpolynom)

$s(2-s) = 0$ $s_1 = 0$, $s_2 = 2$ Poler i HHP!

Kretsöverföring ej stabil! Men det å.k. sys. måste inte vara instabilt!

=> Fullständiga Nyquistkriteriet!

1. $s = j\omega$, $\omega = 0 \to \infty$

$$G(j\omega) = \frac{2+j\omega}{j\omega(2-j\omega)} = [\text{Multiplicera med konjugat}] =$$

$$= \frac{4j\omega - 4\omega^2 - j\omega^3}{-\omega^2(4+\omega^2)} = \underbrace{\frac{4}{4+\omega^2}}_{Re} + \underbrace{\frac{\omega^2-4}{j\omega(4+\omega^2)}}_{Im}$$

$$\lim_{\omega \to 0+} Re(G(j\omega)) = 1$$

$$\lim_{\omega \to 0+} Im(G(j\omega)) = -\infty$$

$$\lim_{\omega \to \infty} Re(G(j\omega)) = 0$$

$$\lim_{\omega \to \infty} Im(G(j\omega)) = 0$$

ω :	0+	1	$\sqrt{2}$	2	4	∞
Re :	1	0.8	0,67	0,5	0,2	0
Im :	$-\infty$	-0,6	-0,24	0	0,15	0

2. $s = Re^{i\varphi}$, $R \to \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2} \sim -\frac{\pi}{2}$

$$G(Re^{i\varphi}) = \frac{2 + Re^{i\varphi}}{Re^{i\varphi}(2 - Re^{i\varphi})} = [\text{Dela med } R] = \frac{2/R + e^{i\varphi}}{e^{i\varphi}(2 - Re^{i\varphi})}$$

$R \to \infty$: $G(Re^{i\varphi}) = 0$ (Hela halvcirkel punkt i origo)

3. $s = j\omega$, $\omega = -\infty \rightarrow 0$

$Re(G(-j\omega)) = Re(G(j\omega))$

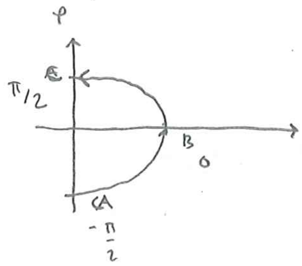
$Im(G(-j\omega)) = -Im(G(j\omega))$

Spegling av 1. i realaxel

4. $s = re^{i\varphi}$, $r \rightarrow 0$ $\varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{\pi}{2}$

$$G(re^{i\varphi}) = \frac{2 + re^{i\varphi}}{re^{i\varphi}(2 - re^{i\varphi})} \rightarrow \frac{2}{2re^{i\varphi}} = \frac{1}{re^{i\varphi}}$$

$\rightarrow \infty e^{-i\varphi}$ när $r \rightarrow 0$ (titta på tecken)



A: $\varphi = -\frac{\pi}{2} \rightarrow G(re^{i\varphi}) = \infty \cdot e^{i\frac{\pi}{2}} =$

$= \infty(\cos(\frac{\pi}{2}) + j\sin(\frac{\pi}{2})) =$

$= \infty \cdot j$

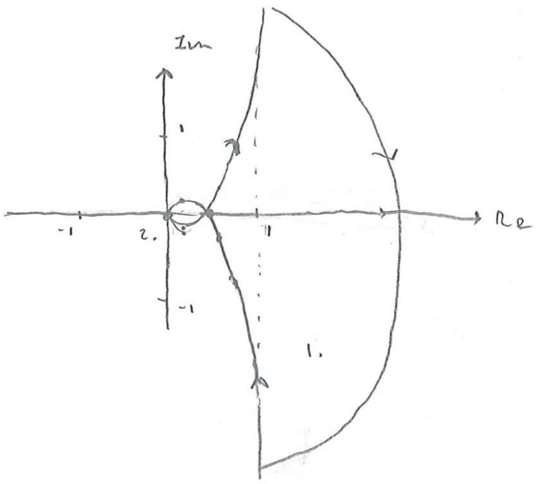
B: $\varphi = 0 \rightarrow G(re^{i\varphi}) = \infty \cdot e^{i \cdot 0} = \infty$

C: $\varphi = \frac{\pi}{2} \rightarrow G(re^{i\varphi}) = \infty \cdot e^{-i\frac{\pi}{2}} =$

$= \infty(\cos(-\frac{\pi}{2}) + j\sin(-\frac{\pi}{2})) =$

$= -j \cdot \infty$

Rita och undersök:



Stabilt å.h. sys?

Studera Re = -1, hur många omslingringar?

$N = 0$

Poler i HHP?

$P = 1$

$Z = N + P = 1$

För stabilitet $Z = 0 \rightarrow Z = 1 \neq 0$

Instabilt!

4.4

$$G(s) = \frac{K}{s-1} e^{-\tau s} \qquad K = 2 \quad \tau = 0{,}2$$

1. $s = j\omega$, $\omega = 0 \to \infty$

$$G(j\omega) = \frac{2}{j\omega - 1} e^{-0{,}2 \cdot j\omega} = [\text{Förläng med konjugat}] = \frac{2(-j\omega-1)}{(j\omega-1)(-j\omega-1)} e^{-0{,}2 j\omega}$$

$$= \left(\frac{-2}{(1+\omega^2)} + \frac{j(-2\omega)}{(1+\omega^2)}\right) e^{-0{,}2 j\omega}$$

$$= \left(\frac{-2}{1+\omega^2} + \frac{j \cdot -2\omega}{1+\omega^2}\right) \cdot (\cos(0{,}2\omega) - j\sin(0{,}2\omega))$$

$$= -\left(\frac{2\cos(0{,}2\omega) + 2\omega\sin(0{,}2\omega)}{1+\omega^2}\right) - j\left(\frac{2\omega\cos(0{,}2\omega) - 2\sin(0{,}2\omega)}{1+\omega^2}\right)$$

ω	0	0,5	1	2	3	5	8	20	25
Re	-2	-1,7	-1,2	-0,7	-0,5	-0,4	-0,25	0,08	0,08
Im	0	-0,6	-0,8	-0,6	-0,4	-0,1	0,04	0,06	-0,03

ω	35	45	50	∞
Re	-0,04	-0,02	0,02	0
Im	-0,04	0,04	0,03	0

2. $s = Re^{i\varphi}$, $R \to \infty$, $\varphi = \frac{\pi}{2} \curvearrowright -\frac{\pi}{2}$

$$G(Re^{i\varphi}) = \frac{2}{Re^{i\varphi} - 1} e^{-0{,}2 \cdot Re^{i\varphi}} \longrightarrow 0, \quad R \to \infty$$

3. $s = -j\omega$, $\omega = -\infty \to 0$ $\Rightarrow$ Spegling

4. Behövs ej här! Ingen renodlad s-term i nämnaren

$P = 1$, $N = -1$ $Z = N + P = 0 \Rightarrow$ Stabilt!

ÖVNING 8 (till labben!)

4.7. Regulator från Ziegler/Nichols (ingen given processmodell)

Självsvängning fås då $K_0|G(j\omega_\pi)| = 1 = 0$ dB

$\arg(G(j\omega_\pi)) = -180°$

Ur Bode: $20\log(K_0) = 13$ dB

$K_0 = 10^{13/20}$ ggr

Periodtid: $T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = \frac{2\pi}{1}$

Glad-Ljung (s. 56): $K_a = 0{,}6K_0 = 0{,}6 \cdot 10^{13/20}$

$T_I = \frac{T_0}{2} = \frac{2\pi}{2} = \pi$ s — integrationstid

$T_D = \frac{T_0}{8} = \frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ s — "deriveringstid"

Regulator: $F_{PID} = K_a\left(1 + \frac{1}{T_I s} + \frac{T_d s}{\alpha T_d s + 1}\right)$

Inte realiserbar
→ behöver en nämnare
(stora variationer i d = stora styrsignaler)
Filtreringsdel

4.10. $G_p = \frac{e^{-s}}{s(s+1)}$ $G_{PD} = K\frac{(1+\tau s)}{1+\beta\tau s}$ så att $\varphi_m = 30°$ och $\omega_c = 1$ rad/s

Def ω_c och φ_m:

$|L(j\omega_c)| = 1$

$\arg(j\omega_c) = \varphi_m - 180°$

1. Bestäm hur stort faslyft som krävs vid önskad ω_c för att önskad φ_m ska fås, dvs beräkna $\arg(G_{PD}(j\omega_c))$

$\arg(L(j\omega_c)) = \arg(G_{PD}(j\omega)) + \arg(G_p(j\omega_c)) = \varphi_m - 180°$

$\arg(G_{PD}) = \varphi_m - 180° - \arg(e^{-j\omega_c}) + \arg(j\omega_c) + \arg(j\omega_c + 1)$

$= \varphi_m - 180° + \omega_c \frac{180}{\pi} + 90° + \operatorname{atan}(\omega_c) = 42{,}3°$

Kontrollera!

2. Bestäm β och τ

Placera maximala faslyftet (φ_{max}) vid önskad ω_c $\left(\omega_c = \frac{1}{\tau_D \sqrt{\beta}}\right)$

$\longrightarrow \varphi_{max} = \arg\left(F_{PD}(j\omega_c)\right)$

β ges då av: $\beta = \left(\frac{\cos(\varphi_{max})}{1 + \sin(\varphi_{max})}\right)^2 = 0,2$

$$\tau = \frac{1}{\omega_c \sqrt{\beta}} = 2,3 \text{ s}$$

Kontrollera med MATLAB! (process. leadfilter)

3. Bestäm k så att önskad ω_c fås

(1) $\Rightarrow$ $|L(j\omega_c)| = |G_{PD}(j\omega_c)|\,|G_P(j\omega_c)| = 1$

PD-regulator: $|G_{PD}(j\omega_c)| = \frac{k}{\sqrt{\beta}}$

$\Rightarrow$ i (1) $\Rightarrow$ $\frac{k}{\sqrt{\beta}}|G_{PD}(j\omega_c)| = 1$

$$k = \frac{\sqrt{\beta}}{|G_P(j\omega_c)|} = \frac{\sqrt{\beta}}{\left|\frac{e^{-j\omega_c}}{j\omega_c(j\omega_c+1)}\right|} = \sqrt{\beta}\,\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1} =$$

$$= 0,63 = -4 \text{ dB}$$

Kontrollerades tidigare: MATLAB! stämmer!

4.9. PD-regulator

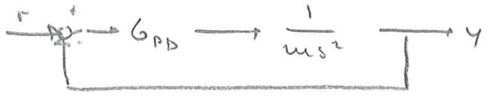
N. II-lag: $F = m \cdot a$

Givet: $F = u(t)$

position för massa $y(t)$

Acceleration: $\frac{d^2}{dt^2} y(t) = a(t)$

$\mathcal{L}$-transform: $ms^2 Y(s) = U(s)$ $\Rightarrow$ $Y(s) = \frac{1}{ms^2} U(s)$ processmodell!



$$G_{PD}(s) = K\frac{(1+\tau s)}{(1+\beta\tau s)} \quad , \quad \varphi_m = 40° \quad \omega_c = 10 \text{ rad/s}$$

Def φ_m och ω_c: $|L(j\omega_c)| = 1$

$$\arg(L(j\omega_c)) = \varphi_m - 180°$$

$$\text{Arg}(G_p(j\omega)) = -\arg(j\omega)^2 = -2\arg(j\omega) = -180° \text{ för allt!}$$

1. Faslyft för $\varphi_m = 40°$

$$\text{Arg}(F_{PD}(j\omega_c)) = \varphi - 180 - \arg(G_p(j\omega_c)) = 40°$$

2. Bestäm τ och β

Låt maximala faslyftet vara vid önskat ω_c

$\Rightarrow \varphi_{max} = \arg(F_{PD}(j\omega_c)) = 40°$

$$\beta = \left(\frac{\cos(\varphi_{max})}{1+\sin(\varphi_{max})}\right)^2 = 0{,}22$$

$$\tau = \frac{1}{\omega_c\sqrt{\beta}} = 0{,}21$$

3. Bestäm K utifrån kravet på ω_c

$$K = \frac{\sqrt{\beta}}{|G_p(j\omega_c)|} = \frac{\sqrt{\beta}}{|1/m(j\omega_c)^2|} = \sqrt{\beta}\, m\omega^2 =$$

4.8. $G_p(s) = \frac{K}{s}e^{-Ls}$ söker $F_{PI}(s) = K_A\left(1 + \frac{1}{T_I s}\right)$, designad med Ziegler-Nichols metod

1. Självsvängning fås då: $K_0|G(j\omega_\pi)| = 1$

$$\arg(G(j\omega_\pi)) = -180°$$

$$\arg(G(j\omega_\pi)) = \arg\left(\frac{k}{j\omega_\pi}\right) + \arg(e^{-Lj\omega_\pi}) = -180°$$

$$-90° - L\omega_\pi\frac{180}{\pi} = -180°$$

$$\omega_\pi = \frac{\pi}{L}\cdot\left(\frac{180-90}{180}\right) = \frac{\pi}{2L}$$

$$K_0 |G(j\omega_\pi)| = 1 \Rightarrow K_0 \left| \frac{k}{j\omega_\pi} e^{-Lj\omega_\pi} \right| = 1$$

$$K_0 \cdot \frac{k}{\omega_\pi} = 1 \qquad K_0 = \frac{\omega_\pi}{k}$$ ger självsvängning

2. Periodtid på självsvängningar: $\omega_\pi = \frac{\pi}{2L} \Rightarrow T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{2\pi}{\omega_\pi} = 4L$

3. Regulatorparametrar enligt Z/N för PI-regulator:

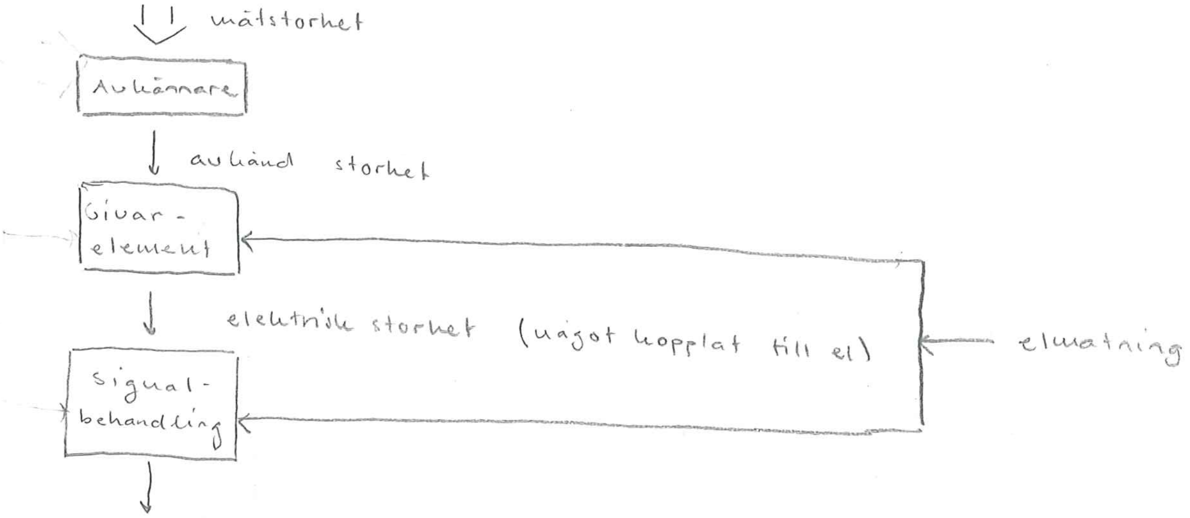
Enligt tabell: $K_p = 0{,}45 K_0 = \frac{0{,}4\pi}{2LK}$

$$T_I = \frac{T_0}{1{,}2} = \frac{10L}{3}$$

Regulator: $F_{PI}(s) = \frac{0{,}45\pi}{2LK}\left(1 + \frac{3}{10Ls}\right) = [\text{på Bodeform}] = \frac{0{,}45\pi}{2Lk}\left(\frac{\frac{10}{3}Ls + 1}{\frac{10}{3}Ls}\right)$

FÖRELÄSNING 10

Givare



Mätsignal (4-20 mA, 0-5 V, 1-5V)
(till t.ex. reglersystem)

(för att kunna säkerställa att den funkar)

Egenskaper hos givare

- Statiska egenskaper:
  - Känslighet (storlek på elektrisk storhet per storlek på mätstorhet)
  - Noggrannhet (varians och upplösning)
  - Linjäritet (linjära områden)
    (signalbehandling kan numera ofta användas för linjärisering)
  - SNR (signal-to-noise-ratio)

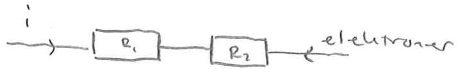
- Dynamiska egenskaper:
  - Värmetransport
  - Masstransport
  - Upplagring av massa
  - Mekanisk rörelse

- Beskrivs av, t.ex.:
  - Tidskonstant (1:a ordn)
  - Dämpning (2:a ordn)
  - Insvängningstid, med dötid
  - Stigtid, ingen dötid
  - Svarstid (T_{50}), med dötid

Mätbryggor

Används för att omvandla givarstorheter, som t.ex. kapacitans, resistans, induktans, till spänning.

Spänningsdelning:



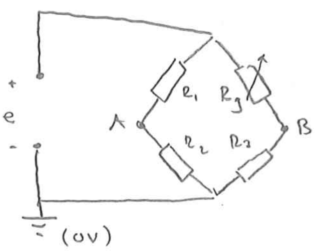
$e_1 = R_1 i$ $\quad$ $e_2 = R_2 i$

$$e = e_1 + e_2 = i(R_1 + R_2)$$

$$\Rightarrow \quad e_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} e$$

$$e_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e$$

Enkel Wheatstonebrygga



$$e_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e \qquad e_B = \frac{R_3}{R_3 + R_g} e$$

R_g kan bestämmas genom att bestämma något av de andra motstånden så att $e_A = e_B$.

I en onlinegivare balanseras bryggan ($e_A = e_B$) nominellt (vid en given temperatur) och sedan ger $e_{AB} = e_A - e_B$ ett mått på $R_g - R_{g,nom}$ som är approximativt linjärt.

Aktiva givare

Aktiva givare ger utan spänningsmatning en elektrisk signal som funktion av den uppmätta storheten.

Ex) Termoelektriska givare (potentialdiff. mellan två sammanfogade metaller)

Ex) Piezoelektriska givare (elektriska laddningar på kristallytor som utsätts för mekaniskt tryck)

Ex) Hallgenerator (ledare utsätts för magnetfält)

Passiva givare

Passiva givare kräver elektrisk matning.

Ex) Resistiva

- Motståndstermometrar
- Trådtöjningsgivare
- Termistor (halvledare)
- Potentiometer

Ex) Induktiva (förändring i magnetfält och inducerad spänning då en ledare förs in i fältet)

Ex) Kapacitiva (kapacitans i en oscillerande krets ändras)

Temperaturgivare

- Resistanstermometrar ($T \sim 5-30s$ i vatten, $T \sim 1-4$ min i luft) ($-200 - 850°C$)
- Termoelement ($T \sim 0s - 1min$) ($-200 - 1750°C$)
- Termistor (mycket hög känslighet, dålig hållbarhet, $<300°C$)

Flödesgivare

- Tryckdifferens (rör med avsmalningsparti) (Venturi)
- Rotor (propeller, turbin, vinghjul)
- Elektromagnetik (Faraday)

  $e = f(q)$

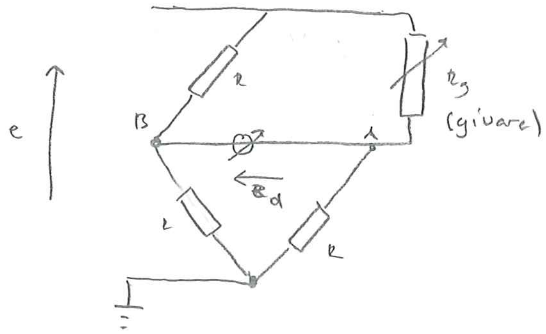
- Akustik (Dopplereffekt)

Nivågivare

- Tryck ($h = \frac{P - P_0}{\rho g}$)
- Kapacitiva / elektrostatiskt
- Eko (tidsskillnad)
- Flottör

ÖVNING 9

10.1



Resistans $R_g = R(1+r)$

$r < 0{,}01$

e_d uppmätt spänning

a) Visa att e_d beror (nästan) linjärt på r

$$e_d = e_B - e_A$$

Använd spänningsdelning för att teckna A och B

$$u_n = \frac{R_n}{\sum_{i=1}^{4} R_i} \cdot u$$

$$e_B = \frac{R}{2R} e = \frac{1}{2} e$$

$$e_A = \frac{R}{R+R_g} e = \frac{1}{2+r} e$$

$$e_d = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2+r}\right)e = \frac{r}{4+2r} e \approx \frac{r}{4} e$$

b) Tilledningar har temperaturberoende resistans

$R_L = R(r_{l,0} + r_l)$ $\quad r_l < 0{,}00012$

Hur stort blir mätfelet som ej kan kalibreras bort?

R_g ersätts med $2R_L + R_g = R(2r_{l,0} + 2r_l + 1 + r)$

$$e_d \approx \underbrace{\frac{r_{l,0}}{2} e}_{\text{konstant}} + \underbrace{\frac{r_l}{2} e}_{\text{T-fel}} + \underbrace{\frac{r}{4} e}_{\text{önskat}}$$

$\frac{r_l}{2} e$ kan ej kalibreras bort

c) Tre temperaturberoende tilledningar

Hur ser relationen mellan r och e_D ut då?

$$e_D = e_B - e_A = \frac{R}{2R+R_L} e_c - \frac{R}{R+R_L+R_g} e_c = \left(\frac{1}{2+r_{l,0}+r_l} - \frac{1}{1+r_{l,0}+r_l+1+r}\right) e_c$$

$$= \frac{r}{(2+r_{l,0}+r_l)(2+r_{l,0}+r_l+r)} e_c \approx \frac{r}{4} e_c$$

Bestäm e_c: R_{tot} betecknar hela bryggans resistans

$$\frac{1}{R_{tot}} = \frac{1}{2R+R_L} + \frac{1}{R+R_L+R_g} = \frac{3R+2R_L+R_g}{(2R+R_L)(R+R_L+R_g)}$$

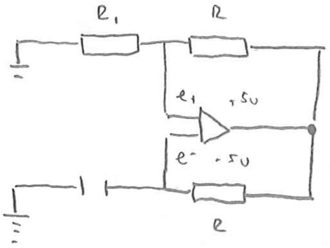
$$e_c = \frac{R_{tot}}{R_{tot}+R_L} e = e\left(1 - \frac{R_L}{R_{tot}+R_L}\right) = [\text{utvecklad}] =$$

$$\approx e$$

$$\Rightarrow e_d = \frac{r}{4} e_c \approx \frac{r}{4} e$$

10.2. Kapacitiv givare + relaxationsoscillator

Givare: $C = ky$



$$e = \begin{cases} 5V & \text{då } e_+ > e_- \\ -5V & \text{då } e_+ < e_- \end{cases}$$

$e = 5V$

$e_- = 0$

a) skissa $e_-(t)$ och $e(t)$ för $t \geq 0$

Kondensator: $i(t) = C \frac{de_-(t)}{dt} \rightarrow I(s) = CsE_-(s)$

Potentialvandring ger: $e(t) = e_-(t) + Ri(t)$

$$E(s) = E_-(s) + RCsE_-(s).$$

$$E_-(s) = \frac{1}{1+sRC} E(s)$$

$t = 0$: $e_- = 0$ V

$e = 5$ V $\quad (e(t) = 5\sigma(s),\ E(s) = \frac{5}{s})$

$e_+ = 2{,}5$ V

$$E_-(s) = \frac{1}{1+sRC} \cdot \frac{5}{s}$$

$$e_-(t) = \mathcal{L}^{-1}(E_-(s)) = 5(1-e^{-t/RC})$$

När $e_-(t_1) = 2{,}5$ V vid tiden t_1 då ändras e till $e = -5$ V

$$e_-(t) = 2{,}5 - 7{,}5(1-e^{-(\frac{t-t_1}{RC})})$$

När $e_- = -2{,}5$ V vid $t = t_2$?

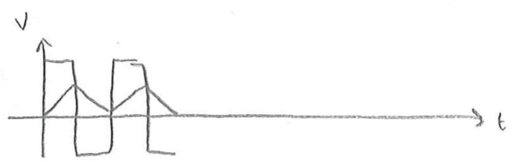
$$e_-(t) = -2{,}5 + 7{,}5(1-e^{-(t_1-t_2)/RC}$$

När $e_- = 2{,}5$ V vid $t = t_3$:

e slår om till -5V

$$e_-(t) = 2{,}5 - 7(1-e^{-(t_2-t_3/RC)})$$

b) Periodtid för oscillationer



$e_-(t_2)$: precis innan skifte!

$$-2{,}5 = 2{,}5 - 7{,}5(1-e^{-(t_2-t_1)/RC})$$

$$e^{-(t_2-t_1)/RC} = \frac{2{,}5}{7{,}5} = \frac{1}{3}$$

$$t_2 - t_1 = RC\ln(3)$$

Periodtid: $2(t_2 - t_1) = 2RC\ln(3)$

$$= 2R_4 \ln(3)$$

ÖVNING 10

10.8 Doseringspump $(NH_4^+ + OH^- \rightleftarrows NH_3 + H_2O)$

Jämvikt: $\frac{K[NH_3]}{[NH_4^+]} = [OH^-]$ → konstant

$[NH_4^+]$ ska mätas, men vi registrerar $[OH^-]$ på membranet → proportionellt!

1. MB → 2. Tillståndsform (Matris) → 3. ÖFF

Transport: l m

Tiden för transport: $L = \frac{l \cdot A}{q}$ => dödtid

1. <u>MB för kväve</u>

Bägare: $\frac{d}{dt}(V_b C_{NH_3,b}(t)) = \underbrace{q\, C_{NH_4^+}(t-L)}_{\text{In}} - \underbrace{q\, C_{NH_3}(t)}_{\text{Ut}} - \underbrace{DA(C_{NH_3,b}(t) - C_{NH_3,e}(t))}_{\text{Diffunderar}}$

=> Konstant volym:

$$\frac{d}{dt} C_{NH_3,b}(t) = \frac{q}{V_b} C_{NH_4^+}(t-L) - \frac{q}{V_b} C_{NH_3,b}(t) - \frac{DA}{V_b}(C_{NH_3,b}(t) - C_{NH_3,e}(t))$$

Elektrolyt: $\frac{d}{dt}(V_e \cdot C_{NH_3,e}(t)) = DA(C_{NH_3,b}(t) - C_{NH_3,e}(t))$

=> Konstant volym:

$$\frac{d}{dt} C_{NH_3,e}(t) = \frac{DA}{V_e}(C_{NH_3,b}(t) - C_{NH_3,e}(t))$$

2. <u>Tillståndsekvationer på matrisform</u>

Tillstånd: $\begin{bmatrix} \dot{C}_{NH_3,b} \\ \dot{C}_{NH_3,e} \end{bmatrix}$

Insignal: $C_{NH_4^+}$

Matrisform: $$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} C_{NH_3,b} \\ C_{NH_3,e} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{q}{V_b} - \frac{DA}{V_b} & \frac{DA}{V_b} \\ \frac{DA}{V_e} & -\frac{DA}{V_e} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{NH_3,b} \\ C_{NH_3,e} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{q}{V_b} \\ 0 \end{bmatrix} C_{NH_4^+}(t-L)$$

$l = 1{,}8\ m = 180\ cm$

$A = 1\ cm^2$

$q = 1\ ml/s = 60\ cm^3/min$

$L = \frac{180}{60}\ min = 3\ min$

$V_b = 200\ ml = 200\ cm^3$

$V_e = 2\ ml = 2\ cm^3$

$D = 0{,}4\ cm/min$

$A_m = 0{,}5\ cm^2$

$$\frac{d}{dt}\begin{bmatrix} C_{NH_3,b} \\ C_{NH_3,e} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -0{,}301 & 0{,}001 \\ 0{,}1 & -0{,}1 \end{bmatrix}}_{A} \begin{bmatrix} C_{NH_3,b} \\ C_{NH_3,e} \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix}}_{B} C_{NH3}(t-3)$$

Utsignal: $$y(t) = \underbrace{[0 \quad K]}_{C} \begin{bmatrix} C_{NH_3,b} \\ C_{NH_3,e} \end{bmatrix}$$

$Y(s) = C(sI-A)^{-1}B \cdot \mathcal{L}(C_{NH_4^+}(t-3))$ → $U(s)$ ersätts pga tidsförskjutning insignal till bägare

$$\mathcal{L}(N_{H_4^+}(t-3)) = e^{-3s}\underbrace{C_{NH_4^+}(s)}_{\text{insignal till slang}} = \underbrace{e^{-3s}}_{\text{en del av processmodellen}} U(s)$$

öff: $G(s) = C(sI-A)^{-1}Be^{-3s} =$

$$= [0 \quad K] \begin{bmatrix} s+0{,}301 & -0{,}001 \\ -0{,}1 & s+0{,}1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0{,}3 \\ 0 \end{bmatrix} e^{-3s} =$$

$$= \frac{Ke^{-3s} \cdot 0{,}03}{(s+0{,}301)(s+0{,}1) - 0{,}0001} \qquad K = ?$$

82

Systemet är stabilt ty poler i VHP

Slutvärdessatsen: $c_{NH_4^+}(t) = \sigma(t) \Rightarrow C_{NH_4^+}(s) = \frac{1}{s}$

$$\lim_{t \to \infty} y(t) = \lim_{s \to 0} s\, G(s) \frac{1}{s} = s \frac{K e^{-3s} \cdot 0{,}03}{(s+0{,}301)(s+0{,}1) - 0{,}00001} \cdot \frac{1}{s}$$

$$= \frac{0{,}03\, K}{0{,}301 \cdot 0{,}1 - 0{,}00001} \approx K$$

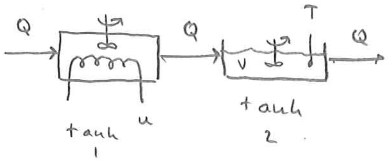
Välj $K = 1$

$\Rightarrow$ Givare som är kalibrerad och visar "rätt" koncentration

10.10

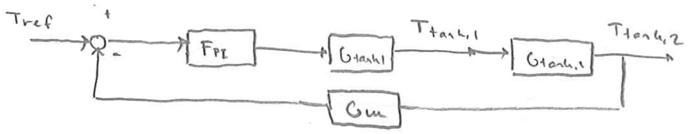
Termisk tröghet (τ)

$T_0 \to T_1 \quad t = 0 \qquad T(t) = T_1 - (T_1 - T_0) e^{-t/\tau}$



$$G_1(s) = \frac{10}{1+s}$$

Återkopplat system:



Gm (Temperaturgivare) ska väljas så att å.k.s uppfylles:

$t_r < 3$ min $\qquad \varphi_m > 45°$

$\rightarrow \quad t_r \approx \frac{1{,}7}{\omega_c}$

Beskriv systemet: $\quad G_{tank,1} = \frac{10}{1+s}$

$G_{tank,2}$: $\quad V = 2\, m^3$

$Q = 1\, m^3/min$

EB: $\quad \frac{d}{dt}(V \rho c_p T_2) = Q \rho c_p (T_1 - T_2)$

Antag ρ, V, c_p, Q konstanta!

$$\frac{d}{dt} T_2 = \frac{Q}{V}(T_1 - T_2) = \frac{1}{2}(T_1 - T_2)$$

Laplace: $sT_2(s) = \frac{1}{2}(T_1(s) - T_2(s))$

$\Rightarrow T_2(s) = \underbrace{\frac{1}{2s+1}}_{G_2(s)} T_1(s)$

Temperaturgivare: $T_m(t) = T_1 - (T_1 - T_0)e^{-t/\tau}$

$u(t) = (T_1 - T_0)\sigma(t) = \Delta u(\sigma(t))$

$\Delta u = T_1 - T_0$

$y(t) = K(1 - e^{-t/\tau})\Delta u + y_0$

$y_0 = T_0$

$T_m(t) = T_0 + 1(1 - e^{-t/\tau})(T_1 - T_0)$

$K = 1 \qquad T = \tau$

öff: $G_m = \frac{u}{1+\tau s} = \frac{1}{1+\tau s}$

Regulator: $F_{PI}(s)$

$F_{PI}(s) = K_p\left(1 + \frac{1}{T_i s}\right) = \frac{K_p(sT_i + 1)}{sT_i}$

Långsammast pol närmast origo! Vilken?

Polpolynom: $G_1(s) \Rightarrow s_1 = -1$

$G_2(s) \Rightarrow s_2 = -\frac{1}{2}$ långsammast!

$T_i = 2$

$F_{PI} = \frac{k_p(2s+1)}{2s} \qquad K_p = ?$

K_p och τ: Bestäms utifrån specifikationer för å.k.s.

Stigtid: $t_r \approx \frac{1,7}{\omega_c} < 3 \Rightarrow \omega_c > \frac{1,7}{3} \approx 0,57$ rad/min

Fasmarginal: $\varphi_m = 180 + \arg(L(j\omega_c))$

Kretsöverföring: $L(s) = G_1 \cdot G_2 \cdot G_m = \frac{K_p(\cancel{2s+1})}{2s} \cdot \frac{10}{1+s} \cdot \frac{1}{\cancel{2s+1}} \cdot \frac{1}{1+\tau s} =$

$= \frac{5K_p}{s(s+1)(\tau s+1)}$

$\varphi_m = 180^\circ + \arg(L(j\omega_c)) = 180^\circ - \arg(j\omega_c) - \arg(1+j\omega_c) - \arg(\tau j\omega_c+1) =$

$= 180^\circ - 90^\circ - \operatorname{atan}(\omega_c) - \operatorname{atan}(\tau\omega_c) > 45^\circ$

$= 90^\circ - \operatorname{atan}(0{,}87) - \operatorname{atan}(0{,}87\tau) > 45^\circ$

$\Rightarrow \tau < 0{,}48$ min (Detta är egentligen svaret, men vaffan)

K_p: Def: överkorsningsfrekvens

$|L(j\omega_c)| = 1.$

$\left| \frac{K_p 5}{j\omega_c(j\omega_c+1)(\tau j\omega_c+1)} \right| = \frac{5K_p}{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1}\sqrt{(\tau\omega_c)^2+1}} = 1$

$K_p = \frac{\omega_c\sqrt{\omega_c^2+1}\sqrt{(0{,}48\omega_c)^2+1}}{5} = 0{,}136$

LABORATION 2

1.1 Mätosäkerhet

$\pm(0{,}05\,\%\ +5)$

$2 \cdot 0{,}05\,\% + 5 \cdot 0{,}0001 = \pm 1{,}5\ \text{mV}$

2. Resistansstege

$R_1 = R_2 = 10\ \text{k}\Omega$

$R_3 = R_4 = 4{,}7\ \text{M}\Omega$

$U = 10\ \text{V}$

$R_i = 10{,}1\ \text{M}\Omega$

$R_{e,1} = 9990{,}01\ \Omega$ $\quad R_{e,2} = 3{,}2 \cdot 10^6\ \Omega$

$U_{R1} = 5{,}072\ \text{V}$ $\quad U_{R2} = 5{,}072\ \text{V}$ $\quad U_{R3} = 4{,}105\ \text{V}$ $\quad U_{R4} = 4{,}105\ \text{V}$

Anledning till fel:

3. Amperemeter

Se handledning!