FÖRELÄSNING 4

Modellering / Linjärisering

Vektorer och matriser kan $\mathcal{L}$-transformeras på samma sätt som skalärer:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ y(t) = Cx(t) + Du(t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} sX(s) = AX(s) + BU(s) \\ Y(s) = CX(s) + DU(s) \end{cases}$$

$$(sI - A)X(s) = BU(s)$$

$$X(s) = [sI - A]^{-1} BU(s)$$

$$Y(s) = \underbrace{(C[sI - A]^{-1}B + D)}_{G(s)} U(s)$$

Om vi har flera in- och/eller utsignaler är $G(s)$ en matris (där varje element är en skalär öff)

MIMO: Multi Input, Multi Output

SISO: Single Input, Single Output

OBS! $[sI - A]^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} M$, $\det(sI - A) = 0$ ger poler

Ofta inom kemi- och bioteknik får man olinjära tillståndsmodeller:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = f(x(t), u(t)) \\ y(t) = g(x(t), u(t)) \end{cases}$$

Genom att de flesta analys- och designmetoder för regulatorer baseras (antar) på linjära modeller (tillstånd öff) linjäriseras ofta modellen kring en arbetspunkt.

Flödesbalanser

- Volymflöde $[m^3/s]$: $dV/dt = \sum Q_{in} - \sum Q_{ut}$
- Materialflöde $[mol/s]$: $d/dt\,(Vc) = \sum Q_{in} c_{in} - \sum Q_{ut} c$
- Energiflöde $[W]$: $d/dt\,(\rho C_p V T) = \sum \rho C_p Q_{in} T_{in} - \sum \rho C_p Q_{ut} T + P$
- Strömflöde (Kirchoffs 1:a lag) $[A]$: $\sum I$ in i knutpunkt $= \sum I$ ut från knutpunkt

Intensitetsbalanser

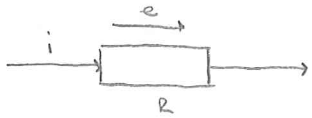
- Kraftbalans (Newtons lag, translation) [kgm/s² = N]: $ma = F_+ - F_-$
- Momentbalans (Newtons lag, rotation) [Nm]: $J\dot{\omega} = \tau_+ - \tau_-$
- Tryckbalans (Newtons lag för fluida system) [N/m²]: $\frac{\rho l}{A} Q = \Delta P$
- Spänningsbalans (Kirchoffs 2:a lag) [V]: $\sum$ spänning runt krets $= 0$

Konstitutiva relationer

- Allmänna gaslagen: $p(t) = \frac{nR}{V(t)} T(t)$
- Bernoullis lag: $q(t) = k\sqrt{\Delta p(t)}$
- Reaktionshastighet: $r(t) = k e^{\frac{E}{RT(t)}} \prod_i c_i^{\alpha_i}(t)$
- Värmebildning: $Q_H = \Delta H_r r(t)$
- Ledningsförmåga: $P(t) = \lambda A (T_1(t) - T_2(t))$
- Luftmotstånd: $F(t) = bv^2(t)$
- Friktion (translatorisk rörelse): $F(t) = Bv(t)$
- Friktion (rotation): $\tau(t) = B\omega(t)$
  $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$
- Fjäder: $F(t) = K\Delta y(t)$
- Styvhet: $\tau(t) = K(\theta_1(t) - \theta_2(t))$
- Ohms lag: $u(t) = Ri(t)$
- Elektromekanisk momentöverföring: $\tau(t) = ki(t)$

Ellära

Resistans (motstånd) ges av Ohms lag:



$R = \frac{e}{i}$

För en tråd som har resistiviteten (r) är $R = \frac{rl}{a}$, där l är trådens längd och a är tvärsnittsarea.

I ett motstånd förloras energi i form av värme. Effekten som förloras är:

$$P(t) = e(t)i(t) = Ri(t)^2$$

<u>Konduktans</u> är ett mått på hur bra ledningsförmåga något har. Denna defineras 1/R. Enhet är siemens/meter, $\frac{1}{\Omega s}$

<u>Induktans</u> för en ideal spole är $e(t) = L\frac{d}{dt}i(t)$

L kallas spolens induktans och mäts i Henry (H).

<u>Kapacitans</u> är ett mått på förmågan hos en isolerad ledare att lagra elektrisk laddning i enheten Farad (F)

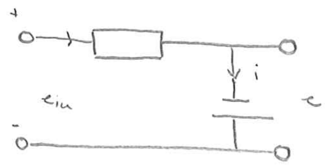
En kondensator är två elektriskt ledande ytor nära varandra skilda av en insulator. Om ytorna har arean A och avståndet mellan plattorna är d är kapaciteten:

$$C = \underbrace{\varepsilon_r \varepsilon_0}_{\text{materialkonstanter}} \frac{A}{d}$$

För en ideal kondensor: $i(t) = C\frac{d}{dt}e(t)$

Analogier 1:sta ordningens system

<u>Exempel</u>:



RC-krets

$$i = C\frac{de}{dt} \rightarrow e(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$$

Kirchoffs 2:a lag : $e_{in} = Ri + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$

$\mathcal{L}$-transform: $E_{in}(s) = RI(s) + \frac{1}{Cs} I(s)$

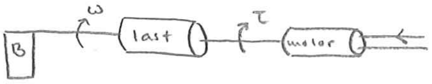
$$I(s) = \frac{1}{R + \frac{1}{Cs}} E_{in}(s)$$

$$E(s) = \frac{1}{Cs} I(s) = \underbrace{\frac{1}{1 + RCs}}_{G} E_{in}(s)$$

Standardform 1:a ordningen : $G(s) = \frac{K}{1 + s\tau}$

$\because$ $\tau = RC$, $K = 1$, dvs samma öff som för en buffertank

Exempel:



$$J\dot{\omega} = \tau - B\omega$$

$$Js\Omega(s) = \tau(s) - B\Omega(s)$$

$$\tau(t) = k\,i(t)$$
$$\tau(s) = kI(s)$$

$$\Omega(s) = \frac{1}{Js}\left(kI(s) - B\Omega(s)\right)$$

$$\Omega(s) = \frac{k/B}{1 + \frac{J}{B}s} I(s)$$

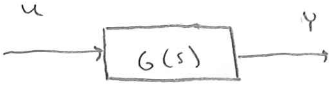
dvs: $\left.\begin{array}{l} K = \frac{k}{B} \\ \tau = \frac{J}{B} \end{array}\right\}$; $G = \frac{K}{1 + s\tau}$

ÖVNING 2

Intro

$$y(t) = \int_0^t g(\tau)u(t-\tau)\,d\tau$$

$$Y(s) = \mathcal{L}(y(t)) = G(s)U(s)$$



$$Y(s) = G(s)U(s)$$

1.12.

Givet $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

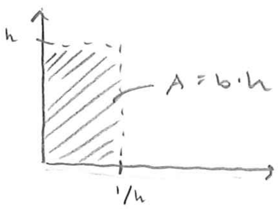
Beräkna och skissa för tre olika fall.

a) $u(t)$ = en puls med bredden = höjden = 1

b) $u(t)$ = —— u —— höjden = 10, bredden = $\frac{1}{h}$

c) $u(t)$ = en enhetspuls, $u(t) = \delta(t)$

$h \longrightarrow \infty$, $b \longrightarrow 0$, area $= b \cdot h = 1$



$$u(t) = h\left(\sigma(t) - \sigma\left(t - \tfrac{1}{h}\right)\right)$$

$$U(s) = \frac{h}{s} - \frac{h}{s}e^{-s/h} = \frac{h}{s}\left(1 - e^{-s/h}\right)$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \underbrace{\frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{h}{s}}_{F(s)}\left(1 - e^{-s/h}\right)$$

PBU : $F(s) = \frac{1}{s(s+1)(s+2)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1} + \frac{C}{s+2}$

$A = 1/2 \quad B = -1 \quad C = 1/2$

$F(s) = \frac{1}{2s} - \frac{1}{s+1} + \frac{1}{2s+4}$

$\mathcal{L}^{-1}(F(s)) = f(t) = \frac{1}{2}\left(1 - e^{-t}\cdot 2 + e^{-2t}\right)\sigma(t)$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(F(s)\cdot h\underbrace{(1-e^{-s/h})}_{\text{tidsfördröjning}}) = \frac{h}{2}\left(1-2e^{-2t}+e^{-2t}\right) - \frac{h}{2}\underbrace{\left(1-2e^{-(t-1/h)}+2e^{-2(t-1/h)}\right)}_{f(t-\frac{1}{h})}$

$\Rightarrow y(t) = \frac{h}{2}\left(1-2e^{-2t}+e^{-2t}\right)\sigma(t) - \frac{h}{2} f(t-\frac{1}{h})\,\sigma(t-1/h)$

a) $h=1$,

$y(t) = \frac{1}{2}\left[\left(1-2e^{-2t}+e^{-2t}\right)\sigma(t) - \left(1-2e^{-(t-1)}+2e^{-2(t-1)}\right)\sigma(t-1)\right]$

b) $h=10$,

$y(t) = 5\left(\left(1-2e^{-t}+e^{-2t}\right)\sigma(t) - \left(1-2e^{-(t-0{,}1)}+2e^{-2(t-0{,}1)}\right)\sigma(t-0{,}1)\right)$

c) $h \to \infty$, $b = \frac{1}{h} \to 0$

$u(t) = \delta(t)$, $\mathcal{L}(u(t)) = 1$

$Y(s) = G(s)\cdot 1 = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = [\text{PBU}] = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$

$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)\sigma(t)$

24

1.13. $G(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)}$

a) $u(t) = \sin(\omega t) \longrightarrow \mathcal{L}(u(t)) = U(s) = \dfrac{\omega}{s^2+\omega^2}$

$$Y(s) = G(s)\cdot U(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

PBU: $Y(s) = \dfrac{A}{s+1} + \dfrac{B}{s+2} + \dfrac{Cs+D}{s^2+\omega^2}$

Vilka utsignaler kommer vara del av $y(t)$? Behöver ej konstanter!

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = \underbrace{Ae^{-t} + Be^{-2t}}_{\substack{\text{transient del} \\ \rightarrow \text{ avklingar} \\ \text{av över tid}}} + \underbrace{C\cdot\cos(\omega t) + \frac{D}{\omega}\cdot\sin(\omega t)}_{\substack{\text{stationär del} \\ \rightarrow \text{ fortsätter} \\ \text{efter avklingning}}}$$

b) Frekvensen kommer vara densamma i in- som utsignal

$$y_{stat}(t) = C\cdot\cos(\omega t) - \frac{D}{\omega}\cdot\sin(\omega t)$$

$$= E\cdot\sin(\omega t + \varphi), \quad \text{där} \quad \varphi = \arctan^{-1}\left(\frac{D}{\omega C}\right)$$

$$C = -\frac{3\omega}{\omega^4+5\omega^2+4} \qquad D = -\frac{\omega(\omega^2-2)}{\omega^4+5\omega^3+4}$$

$$u(t) = \sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = |G(j\omega)|\sin(\omega t + \angle G(j\omega))$$

$$|G(j\omega)| = \left|\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)}\right| = \frac{1}{\sqrt{(1+\omega^2)(4+\omega^2)}}$$

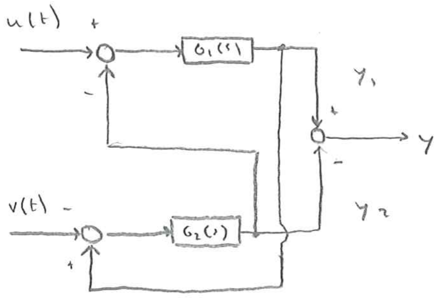
$$\angle G(j\omega) = \arg\frac{1}{(j\omega+1)(j\omega+2)} = \arg(1) - \arg(j\omega+1) - \arg(j\omega+2)$$

$$= 0 - \arctan(\omega) - \arctan\left(\frac{\omega}{2}\right)$$

kaffefläck

1.17

a)



$$Y_1 = G_1(u - Y_2) \qquad (1)$$

$$Y_2 = G_2(Y_1 - V) \qquad (2)$$

(2) i (1): $Y_1 = G_1(u - G_2(Y_1 - v)) =$

$$= G_1 u - G_1 G_2 Y_1 + G_1 G_2 V$$

$$\Rightarrow \quad Y_1(1 + G_1 G_2) = G_1 u + G_1 G_2 v$$

$$\Rightarrow \quad Y_1 = \frac{G_1}{1 + G_1 G_2} u + \frac{G_1 G_2}{1 + G_1 G_2} v$$

$$= \frac{G_1(u + G_2 V)}{1 + G_1 G_2} \qquad (3)$$

(3) i (2): $Y_2 = G_2\left(\frac{G_1(u + G_2 v)}{1 + G_1 G_2} - v\right)$

$$Y = Y_2 - Y_1 = \frac{G_2(G_1 u - v) - G_1(u + G_2 v)}{1 + G_1 G_2}$$

$$= \underbrace{\frac{G_1(G_2 - 1)}{1 + G_1 G_2}}_{G_{uy}} u - \underbrace{\frac{G_2(G_1 + 1)}{1 + G_1 G_2}}_{G_{vy}} v$$

b) Hur påverkar u Y? Sätt v = 0

c) Hur påverkar v Y? Sätt u = 0

1.16.

Insignal $p(t) = 40\sigma(t)$

Vilket typ av system?

- Första ordningen pga hård uppgång?

pga förflyttning

1:a ordningens system: $G(s) = K/1+st \cdot e^{-sL}$

- L = dötiden, stegändring tills ändring i systemet
- $L = 9{,}5 - 5{,}2 = 4{,}3$ min

- Konstanten K, systemets statiska förstärkning
- $K = \dfrac{\Delta y}{\Delta p} = [\Delta p = 40,\ \Delta y = 80] = 2$

- Tidskonstanten T,
- $Y(s) = G(s) \cdot U(s) = \dfrac{K}{1+st} \cdot \dfrac{\Delta p}{s} + \dfrac{y_0}{s}$
- $\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = K\Delta p\,(1 - e^{-t/T}) + y_0$
- $y(t=T) = 80\,(1 \cdot e^{-1}) + y_0 = 160{,}4$

FÖRELÄSNING 5

Linjärisering

En kurva approximeras med en tangent: $f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x - \bar{x})$

→ Går via Taylorutveckling: $f(x) = f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x}) + f''(\bar{x})\frac{(x-\bar{x})^2}{2!} + f^n(\bar{x})\frac{(x-\bar{x})^n}{n!}$

Nära arbetspunkten $\bar{x}$: $f(x) \approx f(\bar{x}) + f'(\bar{x})(x-\bar{x})$

I flera variabler är linjärisering också möjligt enligt

$$\dot{x} = f(x,u) \approx f(\bar{x},\bar{u}) + f'_x(\bar{x},\bar{u})(x-\bar{x}) + f'_u(\bar{x},\bar{u})(u-\bar{u})$$

→ det blir ett plan (man går i x- och u-led)

Välj arbetspunkt så att $f(\bar{x},\bar{u}) = 0$

$$\Delta x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) - \bar{x}_1 \\ \vdots \\ x_n(t) - \bar{x}_n \end{bmatrix} \qquad \Delta u(t) = \begin{bmatrix} u_1(t) - \bar{u}_1 \\ \vdots \\ u_n(t) - \bar{u}_n \end{bmatrix}$$

f'_x och f'_u är Jacobianer

$$\left.\begin{aligned} &\rightarrow \frac{d}{dt}\Delta x(t) = \frac{d}{dt}x(t) \approx A\cdot\Delta x(t) + B\cdot\Delta u(t) \\ &\Delta y(t) = y(t) - \bar{y} \approx C\cdot\Delta x(t) + D\cdot\Delta u(t) \end{aligned}\right\} \text{A, B, C, D är Jacobianer}$$

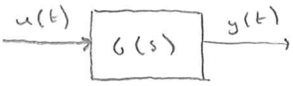
OBS! Om ett system är linjärt redan?

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du \end{aligned} \implies \begin{aligned} f'_x &= A \quad f'_u = B \\ g'_x &= C \quad g'_u = D \end{aligned}$$

- För linjära system är det samma ekvationer för alla arbetspunkter
- I regel väljs alltid att betrakta alla variabler som avvikelser från en arbetspunkt (men för linjära system skrivs inte Δ ut)

→ Antagandet att begynnelsevärdena är noll vid $\mathcal{L}$-transformen är naturligt.

Transientanalys



Dynamiskt system

- Stationär = oföränderlig i tid
- Transient = övergående i tid

Transientanalys innebär att systemet exciteras av en insignal och systemets svar över tid analyseras

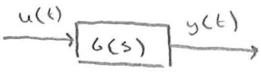
Impulssvar

- Impulssvar: en Diracpuls är en teoretisk funktion som uppfyller

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{för alla } t \neq 0 \\ \infty, & t = 0 \end{cases}$$

$$\int \delta \, dt = 1 \quad \text{(arean)}$$

Används för att den är en bra approximation av en kraftig, men kortvarig signal



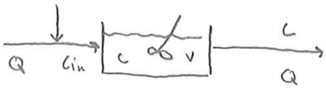
$$u(t) = \delta(t) \Rightarrow U(s) = \mathcal{L}(u(t)) = 1$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s)U(s)) = \mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

$$= g(t)$$

→ Impulssvaret är samma som ett systems viktfunktion

Exempel: Uppehållstidsmätning

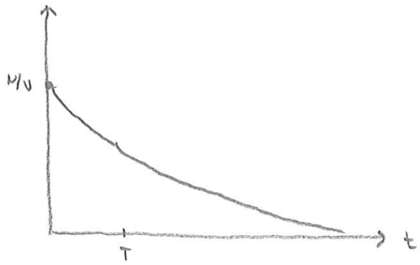


Dumpning av N mol spårämne vid $t = 0$

MB: $V\dot{c} = Q(c_{in} - c) \Rightarrow c(s) = \dfrac{1}{1 + s\frac{V}{Q}} c_{in}(s)$

Vid $c_{in}(t) = 0, \ t \neq 0 \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} c_{in}(t) \cdot Q \, dt = \left[\frac{mol}{m^3} \cdot \frac{m^3}{s} \cdot s\right] = N$

$\Rightarrow c_{in}(t) = N\delta(t)$, $c(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\dfrac{1}{1 + s\frac{V}{Q}} \cdot N\right\} = \dfrac{N}{TQ} e^{-t/T}$



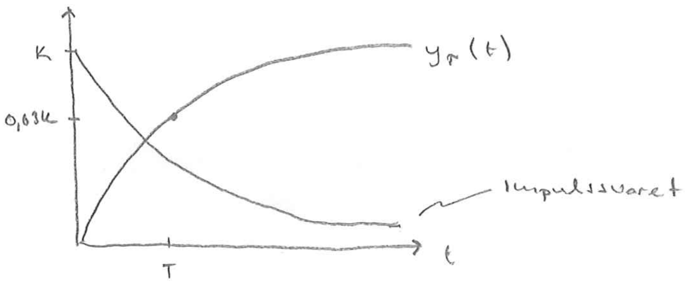
Stegsvar

$$u(t) = \sigma(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} = \int_{0-\varepsilon}^{t} \delta(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s}$$

Exempel: t.ex. tank

$$G(s) = \frac{K}{1 + sT}$$

$$y_r(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{K}{1+sT} \cdot \frac{1}{s} \right\} = K\left(1 - e^{-t/T}\right)$$



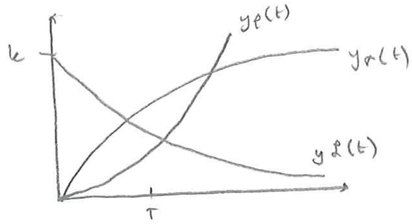
Rampsvar

$$u(t) = \rho(t) = \begin{cases} t & t > 0 \\ 0 & t \le 0 \end{cases} = \int^{t} \sigma(\tau)\,d\tau \quad \Rightarrow \quad U(s) = \frac{1}{s^2}$$

$$= \iint \delta(\tau)\,d\tau$$

Exempel: tank

$$y_\rho(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{ \frac{K}{1+sT} \cdot \frac{1}{s^2} \right\} = K\left(t - T\left(1 - e^{-t/T}\right)\right)$$



2:dra ordningens system

1:a ordningens system pga en pol: $G(s) = \frac{k}{1+sT}$

→ Analogt!

2:a ordningens system pga två poler: $G(s) = \frac{k}{(sT)^2 + 2\zeta sT + 1}$

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta s\omega_n + \omega_n^2}$$

- ζ - relativ dämpning
- $\omega_n = 1/T$ - odämpad egenfrekvens
- k - stationär förstärkning

Poler: $s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 = 0 \Rightarrow s_{1,2} = \omega_n(-\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1})$

$\zeta > 0$ → poler i VHP → stabil

$\zeta < 0$ → instabil

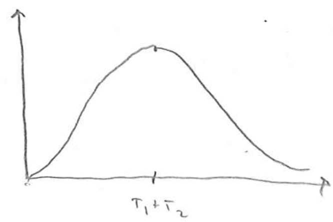
Reela poler $\zeta \geq 1$: $s_{1,2} = -\frac{1}{T}(\zeta \pm \sqrt{\zeta^2 - 1}) = -\frac{1}{T_1}; -\frac{1}{T_2}$

$$\Rightarrow G(s) = \frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)}$$

Exempel: två blandningstankar i serie

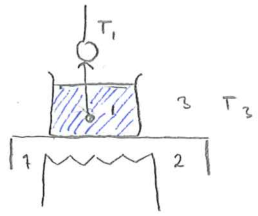
⇒ Impulssvaret = uppehållstidsfördelning

$$y_\delta(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{k}{(1+sT_1)(1+sT_2)}\right) = \frac{k}{T_2 - T_1}\left(e^{-t/T_2} - e^{-t/T_1}\right)$$



ÖVNING 3

2.5.



a) Insignaler: q, T_3

Utsignaler: T_1 (det som mäts)

Tillstånd: T_1, T_2

EB:

Bägare: $$\frac{d}{dt}(C_{p1}T_1) = \underbrace{(T_2 - T_1)k_{12}A_{12}}_{\text{Tillförd värme}} - \underbrace{(T_1 - T_3)k_{13}A_{13}}_{\text{Avgiven värme}}$$

Platta: $$\frac{d}{dt}(C_{p2}T_2) = \underbrace{q}_{\text{tillförd el}} - \underbrace{(T_2 - T_1)k_{12}A_{12}}_{\text{Avgiven till bägare, värme}} - \underbrace{(T_2 - T_3)k_{23}A_{23}}_{\text{Avgiven värme till omgivande luft}}$$

$$\frac{d}{dt}T_1 = -\left(\frac{k_{12}A_{12} + k_{13}A_{13}}{C_{p1}}\right)T_1 + \frac{k_{12}A_{12}}{C_{p1}}T_2 + \frac{k_{13}A_{13}}{C_{p1}}T_3$$

$$\frac{d}{dt}T_2 = \frac{1}{C_{p2}}q + \frac{k_{12}A_{12}}{C_{p2}}T_1 + \frac{k_{23}A_{23}}{C_{p2}}T_3 - \frac{k_{12}A_{12} + k_{23}A_{23}}{C_{p2}}T_2$$

$\Rightarrow$ Matrisform: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t) + Du(t)$

Tillståndsvektor: $x(t) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ Insignalvektor: $u(t) = \begin{bmatrix} q(t) \\ T_3(t) \end{bmatrix}$

$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix}$ Utsignalvektor: $y(t) = T_1 = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$

Tillståndsform: $$\begin{bmatrix} \dot{T}_1 \\ \dot{T}_2 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{-k_{12}A_{12} - k_{13}A_{13}}{C_{p1}} & \frac{k_{12}A_{12}}{C_{p1}} \\ \frac{k_{12}A_{12}}{C_{p2}} & \frac{-k_{12}A_{12} + k_{23}A_{23}}{C_{p2}} \end{bmatrix}}_{A}\begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & \frac{k_{13}A_{13}}{C_{p1}} \\ \frac{1}{C_{p2}} & \frac{k_{23}A_{23}}{C_{p2}} \end{bmatrix}}_{B}\begin{bmatrix} q(t) \\ T_3(t) \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix}}_{C} \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}}_{D} \begin{bmatrix} q \\ T_3 \end{bmatrix}$$

b) Överföringsfunktionsmatris, $G(s) = \dfrac{Y(s)}{U(s)}$

Behöver $\mathcal{L}$-transform: $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$

$y(t) = Cx(t)$

$\longrightarrow \quad sX(s) = AX(s) + BU(s) \qquad (1)$

$Y(s) = CX(s) \qquad (2)$

$(1) \Rightarrow (sI - A)X = BU$

$\Leftrightarrow (sI - A)^{-1} \cdot BU = X$

$(2) \Rightarrow \quad Y(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot BU$

Överföringsfunktion: $G(s) = C \cdot (sI - A)^{-1} \cdot B$

$$\Rightarrow [sI - A]^{-1} = \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \det(sI - A) = (s - a_{22})(s - a_{11}) - a_{12}a_{21}$$

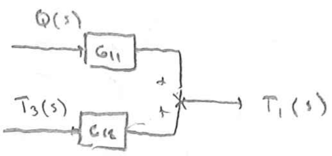
$$G(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(sI - A)} \cdot \begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

$$G(s) = \begin{bmatrix} b_{11}(s - a_{22}) + b_{21}a_{12} & b_{12}(s - a_{22}) + b_{22}a_{12} \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{\det(sI - A)}$$

$$= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ samma polpolynom pga $\det(sI - A)$, två poler!

$$Y(s) = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Q(s) \\ T_3(s) \end{bmatrix}$$



Om omgivning påverkas: ingen T_3, $u(t)$ blir skalär

T_3 läggs till $\dot{x}(t)$

A blir 3×3, B blir 3×1, C blir 1×3

$G(s) = C(sI-A)^{-1}B \longrightarrow$ skalär

3 poler, 3 egenvärden för A

$$q \longrightarrow \boxed{G} \longrightarrow T_1$$

2.6. Sätt upp EB över karen:

$H_1 = V_1 \rho C_p T_1$

$H_2 = V_2 \rho C_p T_2$

Tank 1: $\frac{d}{dt} H_1 = Q_1 \rho C_p T_0 + Q_2 \rho C_p T_2 - Q_1 \rho C_p T_1 - Q_2 \rho C_p T_1$.

Tank 2: $\frac{d}{dt} H_2 = P + Q_2 \rho C_p T_1 - Q_2 \rho C_p T_2$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{H}_1 = -\dfrac{Q_1 + Q_2}{V_1} H_1 + \dfrac{Q_2}{V_2} H_2 + Q_1 C_p \rho T_0 \\ \dot{H}_2 = P + \dfrac{Q_2}{V_1} H_1 - \dfrac{Q_2}{V_2} H_2 \end{cases}$$

$\dot{x} = Ax + Bu \qquad y = Cx + Du$

Insignal: $u = \begin{bmatrix} P \\ T_1 \end{bmatrix}$ Tillstånd: $x = \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$

Utsignal: $y(t) = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$

$$\dot{x}(t) = \begin{bmatrix} -\dfrac{Q_1 + Q_2}{V_1} & \dfrac{Q_2}{V_2} \\ \dfrac{Q_2}{V_1} & -\dfrac{Q_2}{V_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & Q C_p \rho \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P \\ T_0 \end{bmatrix}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{V_1 \rho C_p} & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{V_2 \rho C_p} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$ resten på Pingpong

FÖRELÄSNING 6

Transientanalys, 2:da ordningen

$$G(s) = \frac{k}{(sT)^2 + 2\xi sT + 1} = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2}$$

ξ - relativ dämpning ($\xi > 0$, stabil pga poler i VHP)

ω_n - $1/T$ ~ odämpad egenfrekvens

k - stationär förstärkning

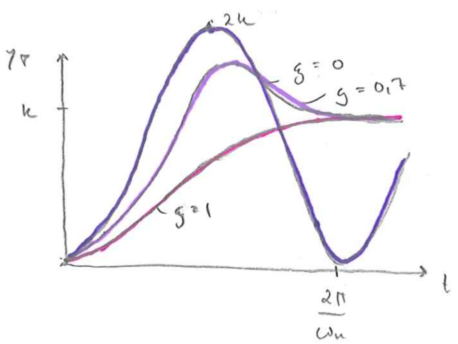
2:a ordningen, komplexkonjugerade poler

Poler: $s_{1,2} = -\omega_n(\xi \pm \sqrt{\xi^2 - 1})$

$= -\omega_n\xi \pm i\omega_d \quad (\omega_d = \sqrt{1-\xi^2} \cdot \omega_n)$

Stegsvar: $y_r(t) = k\left(1 - \frac{e^{-\omega_n\xi t}}{\sqrt{1-\xi^2}} \sin(\omega_d t + \varphi)\right), \quad \xi \leq 1$

$\varphi = \arccos(\xi)$



På gränsen till stabil:

→ sinusutseende

Mellan Ø och 1: dämpat!

$\xi = 0 \longrightarrow y(t) = k(1 - \sin(\omega_n t + \frac{\pi}{2}))$

∴ Reela poler = ingen översläng (kryper över slutvärde)

Komplexa poler = översläng

Ju lägre ξ, desto sämre dämpning (tänk gitarrsträng)

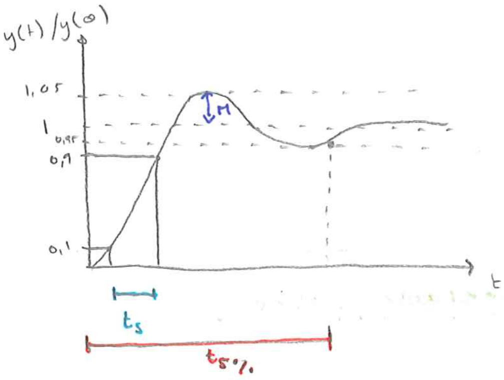
→ stabil, sträng stannar

Ju större ω_n, desto snabbare system

Ju mindre T, desto snabbare system $\quad (\omega_n = \frac{1}{T})$

Stegsvars karakteristik

Stigtid (t_s): tiden från 10% av slutvärdet till 90% av slutvärdet



Dötid påverkar inte stigtid

⟶ bara intressant efter 10 %

Insvängningstid ($t_{5\%}$): Tiden det tar innan responsen ligger inom ± 5% (eller 10%) från slutvärdet

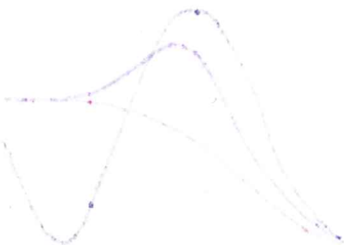
Max relativ översväng (M): $M = \max\left(\frac{y(t)}{y(\infty)}\right) - 1$ (för typ 1, ex).

Exempel: saltproduktion

$2A + B \longrightarrow C$

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{1}{V}u - \frac{Q}{V}x - 2kx^2 = f(x,u) \\ y = x = g(x,u) \end{cases}$$

Olinjärt



Linjärisering: $\Delta\dot{x} = \frac{df}{dx}(\bar{x},\bar{u})\cdot\Delta x + \frac{df}{du}(\bar{x},\bar{u})\Delta u = \left(-\frac{Q}{V} - 4k\bar{x}\right)\Delta x + \frac{1}{V}\Delta u$

($\Delta x = x - \bar{x}$, $\Delta u = u - \bar{u}$)

$$\Delta y = \frac{dg}{dx}(\bar{x},\bar{u})\Delta x + \frac{dg}{du}(\bar{x},\bar{u})\Delta u = \Delta x$$

Alla värden utom $\dot{x}$ givet i uppgift! $\bar{x}$ ges av arbetspunkten. Anta jämvikt i $\bar{x}$.

MB (m.a.p C): $0 = -Q\bar{C}_c + Vk\bar{x}^2$

$V = 50$, $\quad Q = 5$, $\quad k = 2{,}5 \cdot 10^{-4} \quad \Rightarrow \quad \bar{x} = 100$

$\mathcal{L}$-transform och värden: $\quad s\Delta X(s) = 0{,}02\Delta U(s) - 0{,}2\Delta X(s)$

$$5s\Delta X(s) = 0{,}1\Delta U(s) - \Delta X(s)$$

$$\Delta Y(s) = \Delta X(s) = \frac{0{,}1}{1+5s}\Delta U(s)$$

Frekvensanalys

$$u(t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t)$$

Låt $u(t) = A\sin(\omega t)$

Vad blir y då det har gått ett tag $(t \to \infty)$

T. ex: $\quad G(s) = \dfrac{0{,}1}{1+5s} \quad$ (se exempel)

$$U(s) = \mathcal{L}(A\sin(\omega t)) = A \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2}$$

$$Y(s) = G(s)U(s) = \frac{0{,}1}{1+5s} \cdot A \cdot \frac{\omega}{s^2+\omega^2} = [\text{PBU}]$$

PBU: $\quad \dfrac{a}{1+5s} + \dfrac{bs+c}{s^2+\omega^2} = \dfrac{0{,}1 \cdot A\omega}{(1+5s)(s^2+\omega^2)}$

$$a(s^2+\omega^2) + (bs+c)(1+5s) = 0{,}1 \cdot A\omega$$

$$as^2 + a\omega^2 + bs + 5bs^2 + c + 5cs = 0{,}1 \cdot A\omega$$

$$a = \frac{25\omega A}{25\omega^2+1} \qquad b = \frac{-0{,}5\omega A}{25\omega^2+1} \qquad c = \frac{0{,}1\omega A}{25\omega^2+1}$$

$$y(t) = \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{a}{1+5s} + \frac{bs+c}{s^2+\omega^2}\right) = \underset{(1)}{\frac{a}{5}e^{-t/5}} + \underbrace{b\cdot\cos(\omega t) + \frac{c}{\omega}\sin(\omega t)}_{(2)}$$

(2), $B\sin(\omega t + \varphi)$

$B = \sqrt{b^2 + \left(\frac{c}{\omega}\right)^2}$ = hypotenusa

$\varphi = \arctan\left(\frac{c/\omega}{b}\right)$

$$\lim_{t\to\infty} y(t) = \quad (1) \to 0, \quad B\sin(\omega t + \varphi)$$

$$y(t) = \sqrt{\frac{0{,}1^2}{25\omega^2+1}} \cdot -\arctan(5\omega)$$

OBS!: $|G(j\omega)| = \left|\frac{0,1}{1+5j\omega}\right| = \frac{0,1}{\sqrt{25\omega^2+1}} = B$

$\arg(G(j\omega)) = \arg(0,1) - \arctan(5\omega) = -\arctan(5\omega) = \varphi$

Detta gäller alltid! (för alla stabila, linjära system) (om $t \to \infty$)

$u(t) = A\sin(\omega t) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow y(t) = A|G(j\omega)|\sin(\omega t + \arg(G(j\omega)))$

Viktiga!

Viktiga!

- $|G(j\omega)|$ kallas förstärkning
- $|G(j\cdot 0)|$ kallas lågförstärkning
- $|G(j\cdot\infty)|$ kallas högförstärkning
- $\arg(G(j\omega))$ kallas fasförskjutning eller fasvridning (det är ju en vinkel)

I vårt exempel med $\omega = 0,2 = \frac{1}{5}$ rad/min:

$|G(j\omega)| = \frac{\text{amplitud } y}{\text{amplitud } u} = \frac{0,1}{\sqrt{1+5^2\cdot 0,2^2}} = \frac{0,1}{\sqrt{2}} = 0,07$ (amplitud hos $y(t)$)

$\arg(G(j\omega)) = -\arctan(5\cdot 0,2) = -\arctan(1) = -45° = -\frac{\pi}{4}$ rad

Diagram

Bodediagram: visar hur $G(j\omega)$ beror av ω (mot $\log_{e}(\omega)$)

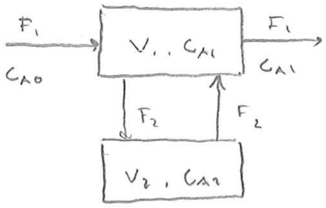
1. Amplituddiagram ($|G(j\omega)|$), förstärkning
2. Faskurva ($\arg(G(j\omega))$), vinkel

Nyquistdiagram: hur $G(j\omega)$ rör sig i komplexa talplanet

$\longrightarrow$ används då Bode inte räcker till!

ÖVNING 4

2.12



$A \xrightarrow{k} B$

$r_A = k_A C_A$ $\quad r = [\text{mol/sek och } m^3]$

a) Insignal: $u(t) = C_{A0}$

Utsignal: $y(t) = C_{A1}$

Tillstånd: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}(t) = \begin{bmatrix} C_{A0} \\ C_{A1} \end{bmatrix}(t)$

MB: $$\frac{d}{dt}(C_{A1} \cdot V_1) = C_{A0} F_1 - C_{A1}(F_2 + F_1) + C_{A2} \cdot F_2 - k_A C_{A1} V_1$$

$$\frac{d}{dt}(C_{A2} \cdot V_2) = C_{A1} F_2 - C_{A2} F_2 - k_A C_{A2} V_2$$

$$\dot{x}_1 = \dot{C}_{A1} = \left(-\frac{F_1 + F_2}{V_1} + k_A\right) C_{A1} + \frac{F_2}{V_1} C_{A2} - \frac{F_1}{V_1} C_{A0}$$

$$\dot{x}_2 = \dot{C}_{A2} = \frac{F_2}{V_2} \cdot C_{A1} - \left(\frac{F_2}{V_2} + k_A\right) C_{A2}$$

Tillståndsform: $\dot{x} = Ax + Bx$
$y = Cx + Dx$

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} -\left(\frac{F_1 + F_2}{V_1} + k_A\right) & \frac{F_2}{V_1} \\ \frac{F_2}{V_2} & -\left(\frac{F_2}{V_2} + k_A\right) \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} -\frac{F_1}{V_1} \\ 0 \end{bmatrix} u$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x + 0 \cdot u$$

b) Överföringsfunktion

$$G(s) = C(sI - A)^{-1} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & s - a_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{\det(sI - A)} \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s - a_{22} & +a_{12} \\ +a_{21} & s - a_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{(s - a_{22})(s - a_{11}) - a_{12} a_{21}} \begin{bmatrix} s - a_{22} & a_{12} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{b_1 (s - a_{22})}{\det(sI - A)} = \frac{\frac{F_1}{V_1}\left(s + \left(\frac{F_2}{V_2} + k_a\right)\right)}{\left(s + \frac{F_1 + F_2}{V_1} + k\right)\left(s + \frac{F_2}{V_2} + k_A\right) - \frac{F_2^2}{V_1 V_2}}$$

2.13.

Insignal: x, c_i

Utsignal: c

Tillstånd: c

MB: $$\frac{dcV}{dt} = Qc_i - Qc - a \cdot r \times V \quad \left[r = \frac{r_0 c}{k + c} \right]$$

$$\frac{dc}{dt} = \frac{1}{V}\left(Q(c_i - c) - \frac{a x r_0 c}{k + c} \right) = f(c_i, c, x)$$

Linjärisera: Arbetspunkt i (c_0, c_{i0}, x_0)

$$\Delta \dot{c} = \underbrace{\left.\frac{df}{dc}\right|_{a.p.}}_{A} \underbrace{\Delta c}_{x} + \underbrace{\left.\begin{bmatrix} \frac{df}{dc_i} & \frac{df}{dx} \end{bmatrix}\right|_{a.p}}_{B} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta c_i \\ \Delta x \end{bmatrix}}_{u}$$

$$\Delta y = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}}_{C} \underbrace{\Delta c}_{x}$$

$$\frac{df}{dc} = -\frac{1}{V}Q - \frac{ax_0}{V}\underbrace{\left(\frac{r_0(k+c_0) - r_0 c_0}{(k+c_0)^2}\right)}_{\frac{dr}{dc}} = \frac{-Q}{V} - \frac{a x_0 r_0 k}{V(k+c_0)^2}$$

$$\frac{df}{dc_i} = \frac{Q}{V}$$

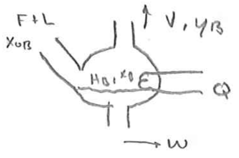
$$\frac{df}{dx} = -\frac{a}{V}\cdot\frac{r_0 c_0}{k+c_0}$$

Matrisform: $$\Delta\dot{c} = \underbrace{-\frac{1}{V}\left(Q + \frac{a x_0 r_0 k}{(k+c_0)^2}\right)}_{\substack{A \\ \text{(skalär)}}}\Delta c + \underbrace{\begin{bmatrix}\frac{Q}{V} & -\frac{a r_0 c_0}{V(k+c_0)}\end{bmatrix}}_{B = [b_{11}\ b_{12}]}\begin{bmatrix}\Delta c_i \\ \Delta x\end{bmatrix}$$

Öff: $G(s) = C(sI - A)^{-1}B$

$\longrightarrow$ (Pga paus) $\longrightarrow$ $\begin{bmatrix}G_{11} & G_{12}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta c_i \\ \Delta x\end{bmatrix}$ → (en beskriver c från ~~in~~ till ut) → (bakterier)

2.10. Kokardelen i en destillationskolonn



F, L, W - vätskeflöden

V - ångflöde

x_{OB}, x_B - molbråk m.a.p flyktigt i vätskefas

y_B - ——"—— ——— ångfas

Interna ångflödet: $V = k_0 + k_1 Q + k_2 Q^2$

Relation x, y : $y_B = \frac{\alpha x_B}{1 + (\alpha - 1)x_B}$

a) MB för kokaren m.ap.:

- Totalt innehåll H_B (1)
- Innehållet av flyktig komp. B (2)

1. $$\frac{dH_B}{dt} = (F+L)-(V+W) \quad [mol/s] \qquad (1)$$

2. $$\frac{dH_B x_B}{dt} = (F+L)x_{0B} - (V y_B + W x_B) \quad [mol/s] \qquad (2)$$

b) VL av (2): $\dot{H}_B x_B + H_B \dot{x}_B$ (3)

Tillstånd: H_B, x_B

Tillståndsderivator: $\dot{H}_B = F+L-W-V(Q) = f_1(H_B; x_B, Q)$

$$\dot{x}_B = \frac{1}{H_B}\Big((F+L)x_{0B} - W x_B - V(Q)y_B - x_B \underbrace{(F+L-V(Q)-W)}_{\dot{H}_B}\Big)$$

$$= \frac{1}{H_B}\Big[(F+L)x_B - (F+L - V(Q)x_B - V(Q)y_B)\Big] =$$

$$= f_2(H_B, x_B, Q)$$

Linjärisera: Arbetspunkt $(\bar{H}_B, \bar{x}_B, \bar{Q})$

$$\Delta Q = Q - \bar{Q} \qquad \Delta x_B = x_B - \bar{x}_B \qquad \Delta H_B = H_B - \bar{H}_B$$

Tillståndsform: $$\dot{x} = \begin{bmatrix} H_B \\ x_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dH_B} & \frac{df_1}{dx_B} \\ \frac{df_2}{dH_B} & \frac{df_2}{dx_B} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta H_B \\ \Delta x_B \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{df_1}{dQ} \\ \frac{df_2}{dQ} \end{bmatrix} \Delta Q$$

Derivator: $$\left.\frac{df_1}{dH_B}\right|_{a.p} = 0 \qquad \left.\frac{df_1}{dx_B}\right|_{a.p} = 0$$

$$\frac{df_1}{dQ}\bigg|_{a.p} = \frac{dV(\bar{Q})}{dQ}\bigg|_{a.p} = -k_1 - 2k\bar{Q}$$

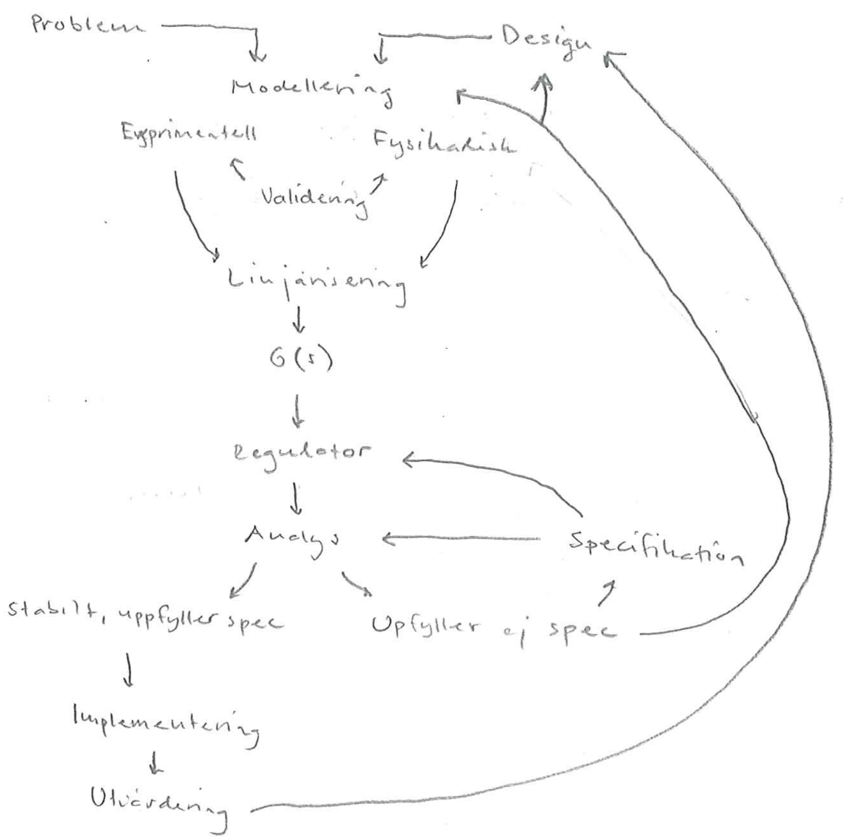
$$\frac{df_2}{dH_B}\bigg|_{a.p} = -\frac{1}{\bar{H}_B}\underbrace{f_2(\bar{x}_B, \bar{H}_B, \bar{Q})}_{\frac{dx_B}{dt}=0} = 0$$

$$\frac{df_2}{dx_B}\bigg|_{a.p} = \frac{1}{\bar{H}_B}\left[-(\bar{F}+\bar{L}-V(\bar{Q})) - V(\bar{Q})\frac{dy_B(x_B)}{dx_B}\right]$$

$\longrightarrow$ resten på Ping-Pong

FÖRELÄSNING 7

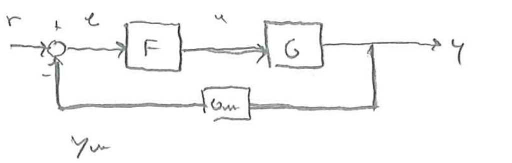
Överblick



Nyquist förenklade stabilitetskriterium

Låt $L(s)$ vara kretsöverföringen, t.ex:

$$L(s) = \underbrace{F(s)}_{\text{regulator}}\underbrace{G(s)}_{\text{process}}\underbrace{G_m(s)}_{\text{givare}}$$



Antag:
- $e = \sin(\omega_\pi t)$
- $L(s)$ stabil
- $\arg(j\omega_\pi) = -180° = -\pi$

$\Rightarrow$

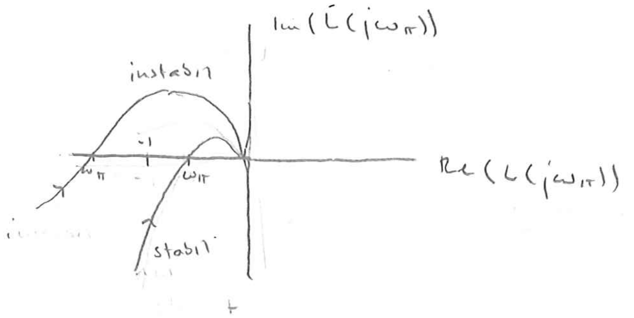
$$y_m(t) = |L(j\omega_\pi)|\sin(\omega_\pi t - \pi)$$
$$= -|L(j\omega_\pi)|\sin(\omega_\pi t)$$
$$= -|L(j\omega_\pi)|e(t)$$

Antag att $|L(j\omega_\pi)| = 1 \Rightarrow y_m(t) = -e(t)$

Med sluten loop så fås en sinussignal med oförändrad amplitud som snurrar varv efter varv i reglerloopen → precis på gränsen till stabilt → systemet är marginellt stabilt.

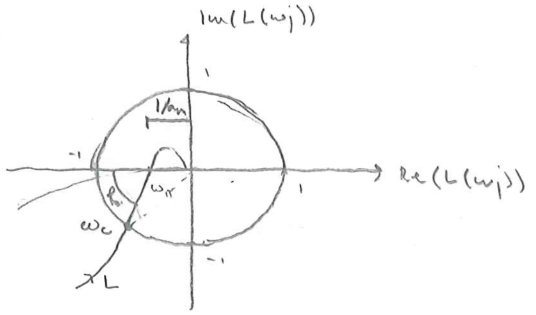
Om $|L(j\omega_\pi)| > 1$ ökar amplituden efter varje varv → instabilt

Om $|L(j\omega_\pi)| < 1$ minskar amplituden efter varje varv → stabilt



Stabilt om ω_π är större än -1. För ej hamna vänster om -1!

Stabilitetsmarginalen



Ju större Am → mer stabilt

Am: hur stor förstärkning som systemet klarar av.

Def: $|L(\omega_c j)| = 1$ (ω_c)

ω_c kallas överkorsningsfrekvens

Def: $\arg(L(\omega_\pi j)) = -180°$ (ω_π)

Def: Amplitudmarginal, $Am = \dfrac{1}{|L(\omega_\pi j)|}$

Anger hur mycket kretsöverföringens förstärkning kan ökas utan att det återkopplade systemet blir instabilt.

Def: Fas(vinkel)marginal, $\varphi_m = \arg |L(\omega_c j)| - 180°$

Anger hur mycket negativ fasvridning (läs dödtid) som kan införas i systemet (å.k.) utan att det blir instabilt.

OBS! Stabilitet för återkopplade system!

Kretsöverföring $L = G_m G_p G_r$ avgör stabilitet!

L stabil medför ej att å.k. är stabilt (automatiskt)

Ex) Aggressiv reglering

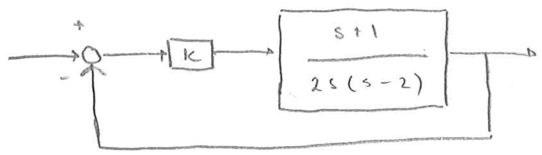
L instabil medför ej att å.k. är instabilt (automatiskt)

Ex) Stabilisera en upprätt kvast

Då måste Nyquists fullständiga måste användas!

Nyquists fullständiga

Ex:



Låt $k = 2 \Rightarrow L(s) = \frac{s+1}{s(s-2)}$

Hur många poler? $(s-2) = 0$ $s = 2$, en pol i HVP

$\Rightarrow P = 1$

Behöver N i $Z = N + P$

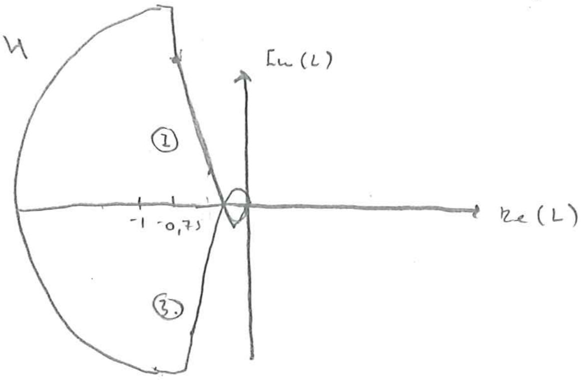
1. $s = j\omega$ $\omega = 0 \to \infty$

$$\Rightarrow L = \frac{j\omega + 1}{j\omega(j\omega - 2)} = \frac{(j\omega)(-j\omega - 2)}{(-j\omega)(-j\omega - 2)} = \underbrace{\frac{-3}{(4+\omega^2)}}_{Re(L)} + j\underbrace{\frac{2-\omega^2}{\omega(4+\omega^2)}}_{Im(L)}$$

Vill plotta:

ω	0	1	$\sqrt{2}$	2	∞
Re(L)	−0,75	−0,6	−0,5	−0,38	0
Im(L)	$+\infty$	0,2	0	−0,12	0

4



2. $s = Re^{j\varphi}$ $\quad R \to \infty \quad \varphi = \frac{\pi}{2} \sim -\frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow L = \frac{Re^{j\varphi}+1}{Re^{j\varphi}(Re^{j\varphi}-2)}$$

$$\lim_{R\to\infty} L(e^{j\varphi}) = \lim_{R\to\infty} \frac{(\cancel{e^{j\varphi}} + 1/\cancel{R})}{Re^{j\varphi}(\cancel{e^{j\varphi}} - \cancel{2/R})} = \lim_{R\to\infty} \frac{1}{R} e^{-j\varphi} = 0$$

Oavsett $\varphi \longrightarrow = 0$

OBS! Om gradtalet i nämnare är större än i täljare blir det alltid 0

3. $s = -j\omega$, $\quad \omega = \infty \longrightarrow 0$
$= j(-\omega)$

$\Rightarrow$ Byt ut ω mot $-\omega$ i räkningar för $Re(L)$ och $Im(L)$ i steg 1.

* $Re(L(-j\omega)) = \frac{-3}{(4+\omega^2} = Re(L(j\omega))$

* $Im(L(-j\omega)) = -Im(L(j\omega)) = -j\frac{2-\omega^2}{\omega(2+\omega^2)}$

OBS! Detta gäller alltid!

$\Rightarrow$ 3 är en spegling a 1 i reaaxeln!

4. $s = re^{j\varphi}$, $\quad r \to 0$, $\quad \varphi = -\frac{\pi}{2} \sim \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow L(re^{j\varphi}) = \frac{re^{j\varphi}+1}{re^{j\varphi}(re^{j\varphi}-2)}$$

$$\Rightarrow L_0 \to \frac{-1}{2r\,e^{j\varphi}} = \frac{-1}{2r} e^{-j\varphi}$$ = En cirkel med oändlig radie

$\mathrm{Arg}(L) = \arg(-\infty) + \arg(e^{-j\varphi}) = -\pi + (-\varphi) = -\pi - \varphi$

$\Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \curvearrowright \frac{\pi}{2}$

$$\left.\begin{aligned}\mathrm{Arg}(L) &= -\pi + \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi}{2} \\ &= -\pi - \frac{\pi}{2} = -\frac{3\pi}{2}\end{aligned}\right\} -\frac{\pi}{2} \curvearrowright -\frac{3\pi}{2}$$

OBS! Allmänt gör L 0,5 varv. antal integrationer medsols

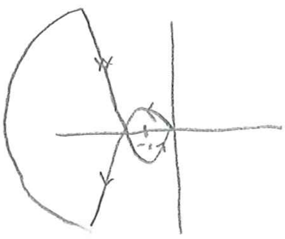
Tolkning: hur många medurs omslingringar runt -1?

En omslingring $\Rightarrow$ $N = 1$

$Z = N + P = 2$ $\Rightarrow$ 2 instabila poler hos å.k. systemet

$\longrightarrow$ instabilt!

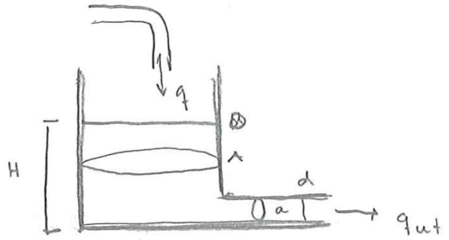
OBS! Med t.ex $K > 4$



$N = -1$ $\Rightarrow$ $Z = 0$

$\longrightarrow$ stabilt! Ibland krävs aggressiv reglering

Laboration 1



$D = 4{,}45$ cm
$d = 0{,}48$ cm
$k = 3{,}3$ cm³/sV
$h_0 = 10$ cm
$g = 981$ cm/s²

$y = h(t)$
$u = v(t)$

Bernoulli: $\rho g h = \dfrac{\rho v^2}{2} \Rightarrow \sqrt{2gh} = v$

$$A = \frac{\pi}{4} D^2 = 15{,}6 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{\pi}{4} d^2 = 0{,}18 \text{ cm}^2$$

$$\frac{dAh}{dt} = q - q_{ut} = q - a\sqrt{2gh}$$

$$q_{ut} = a\sqrt{2gh}$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{q}{A} - \frac{a}{A}\sqrt{2gh} = -\frac{a\sqrt{2gh}}{A} + \frac{kV}{A}$$

Stationärt, $V_0 = \dfrac{a\sqrt{2gh_0}}{k} = \dfrac{a\sqrt{20g}}{k}$

Linjärisering: $\dfrac{dh}{dt} = \dfrac{kV}{A} - \dfrac{a\sqrt{2gh}}{A} = f(h,V)$

$$f_h'(\bar{h},\bar{v}) = -\frac{a\sqrt{2}\sqrt{g}}{2A\sqrt{h}} = -\frac{a}{A}\cdot\sqrt{\frac{g}{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{h}}$$

$$f_v'(\bar{h},\bar{v}) = \frac{k}{A}$$

$$\Delta\dot{h}(t) = -\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\sqrt{h_0}}\Delta h(t) + \frac{k}{A}\Delta V(t)$$

$$s\Delta H(s) = -\frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\sqrt{h}}\Delta H(s) + \frac{k}{A}\Delta V(s)$$

$$\Delta H(s)\left(s + \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\sqrt{h}}\right) = \frac{k}{A}\Delta V(s)$$

$$\frac{\Delta H(s)}{\Delta V(s)} = \frac{k/A}{s + \frac{a}{A}\sqrt{\frac{g}{2}}\frac{1}{\sqrt{h_0}}} = \frac{3{,}3/15{,}6}{s + \frac{0{,}18}{15{,}6}\sqrt{\frac{981}{2}}\frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{0{,}212}{s + 0{,}081}$$

ÖVNING 5

3.16 Utred stabilitet för å.k. system med k.ekv.

$$1s^4 + 6s^3 + 11s^2 + 6s + 10 = 0$$

$G_c = \frac{G_{open}}{KE}$ På form $a_0 s^4 + b_0 s^3 + a_1 s^2 + b_1 s^1 + a_2 = 0$

Använd Rouths kriterium! (en rad mer än gradtal)

1	11	10
6	6	0
c_0	c_1	c_2
d_0	d_1	d_2
e_0	e_1	e_2

$$c_0 = \frac{b_0 a_1 - b_1 a_0}{b_0} = \frac{66 - 6}{6} = 10$$

$$c_1 = \frac{b_0 a_2 - b_2 a_0}{b_0} = \frac{60 - 0}{6} = 10$$

$$c_2 = \frac{b_0 a_3 - b_3 a_0}{b_0} = \frac{0 - 0}{6} = 0$$

$$d_0 = \frac{c_0 b_1 - c_1 b_0}{c_0} = 0$$

$$d_1 = \frac{c_0 b_2 - c_2 b_0}{c_0} = 0$$

$$d_2 = \frac{c_0 b_3 - c_3 b_0}{c_0} = 0$$

$$e_0 = \frac{d_0 c_1 - d_1 c_0}{d_0} = 10$$

$$e_1 = \frac{d_0 c_2 - d_2 c_0}{d_0} = 0$$

$$e_2 = \frac{d_0 c_3 - d_3 c_0}{d_0} = 0$$

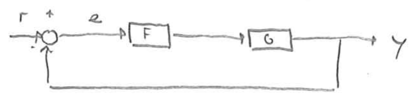
1	11	10	0
6	6	0	0
10	10	0	0
0	0	0	0
10	0	0	0

Om $a_0 > 0$ är systemet stabilt om kolumn har positiva koefficienter (strikt)

Antalet teckenväxlingar = antalet rötter med strikt positiv realdel

=> Marginellt stabilt (rötter på imaginäraxeln)

3.7. Polplacering



Processmodell: $G(s) = \frac{3}{1+2s}$

Regulator: $F(s) = k\left(1 + \frac{1}{Ts}\right)$

a) Bestäm k och T så att å.k. systemet får en dubbelpol i $s = -1$

Önskat polpolynom: $(s+1)(s+1) = s^2 + 2s + 1$

Polpolynomet för å.k. systemet: $1 + L(s) =$ s.kar ekv

$L(s) = F(s)\,G(s)$

Alternativt härled från blockschema:

$Y(s) = G(s) \cdot F(s) \cdot (R - Y(s))$

$Y(1 + GF) = GFR \Rightarrow Y = \underbrace{\frac{GF}{1+GF}}_{G_{RY}} R$

GF: kretsöverföring $L(s) = G \cdot F$

$1 + L(s) = 1 + FG = 1 + k\left(1 + \frac{1}{Ts}\right) \cdot \frac{3}{1+2s} = s^2 + \frac{1+3k}{2} \cdot s + \frac{3k}{2T}$

$s^2 + 2s + 1 \doteq s^2 + \frac{1+3k}{2} s + \frac{3k}{2T}$

$2 = \frac{1+3k}{2}$ $\quad \underline{k = 1}$ $\quad 1 = \frac{3k}{2T} = \frac{3}{2T_i}$ $\quad \underline{T_i = \frac{3}{2}}$

PI-regulator: $F(s) = 1 + \frac{1}{\frac{3}{2}s}$

Proportionerlig

Integrerande

3.7 b) Nytt krav: $\zeta = 0,7$ $\omega_0 = 1$

Allmän form hos 2:a ordn. system med komplexa rötter:

$$\frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} = G(s)$$

$$s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2 = s^2 + \frac{1+3k}{2}s + \frac{3k}{2T}$$

$$2\zeta\omega_0 = \frac{1+3k}{2} \qquad k = \frac{4\zeta\omega_0 - 1}{3} = 0,6$$

$$\omega_0^2 = \frac{3k}{2T} \qquad T = \frac{3k}{2\omega_0^2} = 0,9$$

PI-regulator: $F(s) = 0,6\left(1 + \frac{1}{0,9s}\right)$

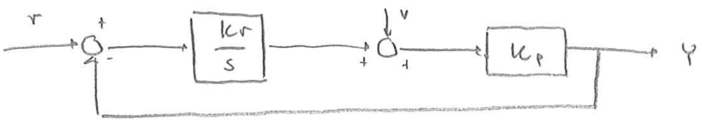
3.5

Åk. system

Processmodell: $G_p = k_p$, $0,04 \le k_p \le 0,08$

Regulator: $\frac{k_r}{s}$, I-regulator

Reglera processen så att stigtiden för å.k. systemet blir max 10 s vid börvärdesändring



$$Y(s) = k_p\left(V + \frac{k_r}{s}(R - Y)\right)$$

$$Y\left(1 + \frac{k_p k_r}{s}\right) = k_p V + \frac{k_r}{s} R \Rightarrow Y(s) = \frac{k_p}{1 + \frac{k_p k_r}{s}} V + \frac{k_p k_r / s}{1 + \frac{k_p k_r}{s}} R(s)$$

$$\Rightarrow Y(s) = \frac{k_p s}{s + k_p k_r} V + \frac{k_p k_r}{s + k_p k_r} R$$

Sätt $R(s) = \frac{1}{s}$

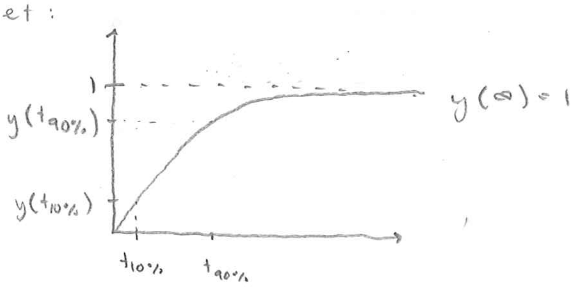
$V(s) = 0$

Teckna $y(t)$ vid $R(s) = \frac{1}{s}$

$$Y(s) = \frac{k_p k_r}{s + k_p k_r} \frac{1}{s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s + k_p k_r}$$

$$\mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = y(t) = (1 - e^{-k_p k_r t})$$

Stegsvaret:



Stigtid $= t_{90\%} - t_{10\%}$

$y(t_{90\%}) = 0{,}9 \Delta y(t) = 0{,}9$

$y(t_{10\%}) = 0{,}1 \Delta y(t) = 0{,}1$

För $y(t_{90\%})$: $0{,}9 = 1 - e^{-t_{90\%} k_p k_r}$

$t_{90\%} = -\ln(0{,}1) / k_p k_r$

För $y(t_{10\%})$: $0{,}1 = 1 - e^{-t_{10\%} k_p k_r}$

$t_{10\%} = -\ln(0{,}9) / k_p k_r$

$$t_r = \frac{1}{k_p k_r}(\ln(0{,}1) - \ln(0{,}9)) = \ln(0{,}9/0{,}1)\frac{1}{k_p k_r} = \ln(3)\frac{2}{k_p k_r} \leq 10\,s$$

krav från uppg

$$\Rightarrow k_r \geq \frac{2\ln(3)}{10 k_p}$$

Strängaste kravet: $k_p = 0{,}04 \Rightarrow k_r = 5.5$

b) Stegformad störning: $V(s) = -\frac{5}{s}$ som sker vid $t=0$

Vid $t=0$ antas systemet vara i vila, $y(t) = 1 = r$

Innan störning: $y(t) = r(t) = 1 \quad t = 0$, $\Rightarrow Y(s) = \frac{1}{s}$

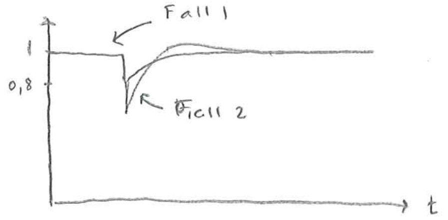
Störning: $Y(s) = \frac{1}{s} + \frac{k_p s}{s + k_p k_r} \cdot \frac{-5}{s}$

$y(t) = \mathcal{L}^{-1}(Y(s)) = 1 - 5k_p e^{-4k_p k_r t}$

Skissa $y(t)$ för extremvärden på k_p:

$k_p = 0{,}04 \quad y(t) = 1 - 0{,}2e^{-0{,}04k_r t}$ (Fall 1)

$k_p = 0{,}08 \quad y(t) = 1 - 0{,}4e^{-0{,}08k_r t}$ (Fall 2)



För stor förstärkning:

- Större maxfel
- Snabbare återgång till börvärde

Titta på 5.12