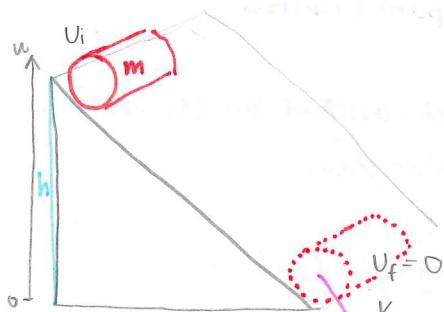


FÖRELÄSNING 26 15/5 MEKANIK

Demonstration

En tom och en full colaburk färs nula ner för ett lutande bord. Den fulla burken kommer ner fortare.



$$U_i = mgh$$

$$K_f = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\frac{v^2}{R^2} = v^2\left(\frac{1}{2}m + \frac{I}{2R^2}\right)$$

glider rullar
(tyngdpunkten)

$$\Rightarrow K_f = U_i$$

$$v^2 = \frac{2 \cdot mgh}{m + \frac{I}{R^2}} = \frac{2gh}{1 + \frac{I}{mR^2}}$$

Full burk: Vi antar att burken är homogen och beter sig som en cylinder.

$$I_f = \frac{1}{2}mR^2$$

$$v_f^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{\frac{1}{2}mR^2}{mR^2}} = \frac{2gh}{\frac{3}{2}} = \frac{4gh}{3}$$

Tom burk: Utan lock och botten kan den ses som en tunn ring.

$$I_t = mR^2$$

$$v_t^2 = \frac{2gh}{1 + \frac{mR^2}{mR^2}} = \frac{2gh}{2} = gh \Rightarrow gh < \frac{4}{3}gh \quad \text{: full burk vinner.}$$

Hastigheten påverkas av förhållandet mellan massa och tröghetsmoment.

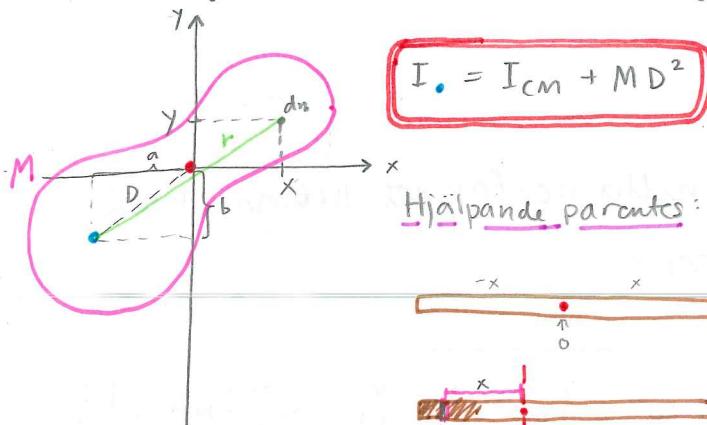
KOM IHÅG:



$$K_R = \frac{1}{2} \int dm v^2 = \frac{1}{2} \int dm r^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \omega^2 \int r^2 dm = \frac{1}{2} \omega^2 I$$

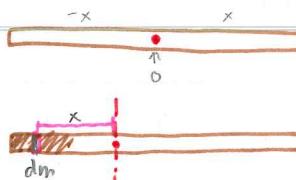
Eftersom $v = rw$ och ω är samma för alla punkter.

Härlledning av parallellförflyttningssatsen



• = masscentrum

Hjälpende parantes:



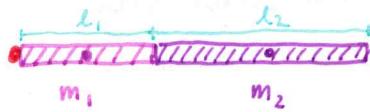
homogen · tyngdpunkt i mitten

\sum varje massfragment · avstånd till CM ska vara samma på båda sidor

$$\begin{aligned}
 I_{\bullet} &= \int r^2 dm = \int (a+x)^2 + (b+y)^2 dm = \int (a^2 + 2ax + x^2 + b^2 + 2by + y^2) dm = \\
 &= \int ((a^2 + b^2) + (x^2 + y^2) + 2ax + 2by) dm = \underbrace{\int (a^2 + b^2) dm}_{D^2} + \underbrace{\int (x^2 + y^2) dm}_{\text{avstånd till } \bullet} + 2a \int x dm + 2b \int y dm = \\
 &= MD^2 + I_{CM}
 \end{aligned}$$

Ty tyngpunktens def. av att massa · avstånd = 0, och x och y anger avstånd till tyngpunkten.

Ex) Pinne med två olika "delar" roteras kring ena änden. Vad blir tröghetsmomentet?



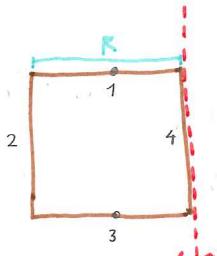
$$I_{CM} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I_1 = \frac{1}{3} m_1 l_1^2 \quad \text{eller} \quad I_1 = \frac{1}{12} m_1 l_1^2 + m_1 \left(\frac{l_1}{2} \right)^2 \quad \text{rotation för första biten.}$$

$$I_2 = \frac{1}{12} m_2 l_2^2 + m_2 \left(l_1 + \frac{l_2}{2} \right)^2 \quad \text{avståndet till CM ligger } l_1 \text{ utanför andra biten.}$$

$$I_{TOT} = I_1 + I_2$$

Ex) Varje pinne har massan m och längden R.



$$I = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \frac{1}{3} m R^2 + m R^2 + \frac{1}{3} m R^2 + 0 = \frac{4}{3} m R^2$$

1 och 3 är pinnar med rotation kring änden: $I_{CM} = \frac{1}{3} m R^2$

2 är som en punkt som roterar, ty alla dm är på samma avstånd

Pinne:

$$I_{CM} = \frac{1}{12} m l^2$$

$$I = I_{CM} + MD^2$$

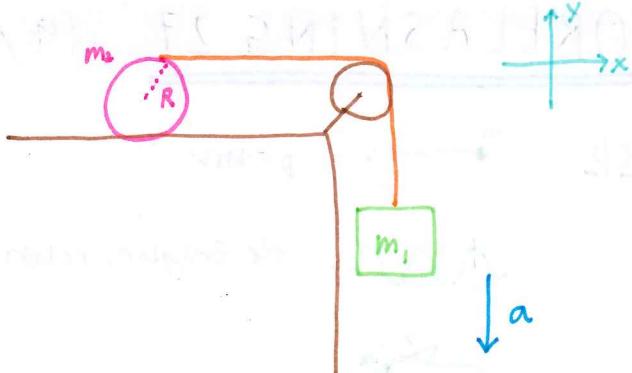
Ex) Två kroppar nollar över kanten på ett bord över en trissa.

$$m_1 = 0,20 \text{ kg}$$

$$m_2 = 1,0 \text{ kg}$$

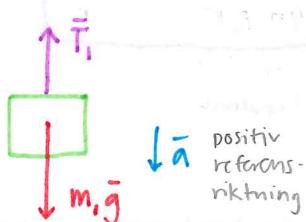
$$R = 0,30 \text{ m}$$

Rullning utan glidning, bestäm a .



FRILÄGG!

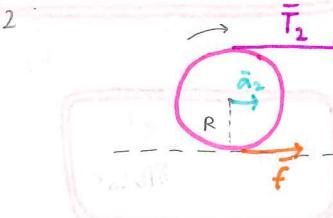
$$m_1:$$



$$m_1 g - |\bar{T}_1| = m_1 a$$

$$m_1 g - T = m_1 a$$

$$m_2:$$



tyngdkraft & normalkraft tar ut varandra i y -led

$$|\bar{T}_1| = |\bar{T}_2| \text{ ty glatt trissa}$$

friktionen motverkar rullningen som \bar{T}_2 ger upphov till

$$\text{cylinder: } I = \frac{1}{2} M_2 R^2$$

$$|\bar{a}_{cm}| = R |\bar{\alpha}| \quad a = R \alpha$$

3 ekv. & 3 obekanta
⇒ lösbart!

$$\text{vridande moment: } TR - fR = \frac{1}{2} m_2 R^2 \alpha$$

$$TR - fR = \frac{1}{2} m_2 R^2 \frac{a}{R}$$

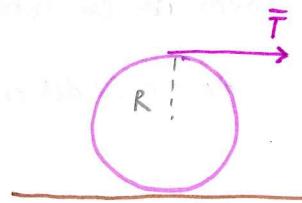
$$T - f = \frac{1}{2} m_2 a$$

$$\text{OBS! } \sum \bar{F}_i = M \bar{a}_{cm}$$

$$\sum \bar{T}_i = I \bar{\alpha}$$

$$f = \frac{T}{3} \Rightarrow a = \frac{m_1 g}{(m_1 + \frac{3}{4} m_2)} = 2,06 \text{ m/s}^2$$

Ex) Vad händer om man väljer fel riktning på friktionen?



$$T = 12 \text{ N} \quad R = 0,5 \text{ m}$$

$$f = 4 \text{ N}$$

$$I = 0,25 \text{ kg m}^2$$

$$M = 2 \text{ kg}$$

$$\textcircled{1} \quad \begin{array}{l} 12 \text{ N} \\ \text{R} \\ \leftarrow 4 \text{ N} \end{array} \quad 12 - 4 = Ma = 2a \quad a = 4 \text{ m/s}^2$$

$$T = 12 \cdot 0,5 + 4 \cdot 0,5 = 8 \text{ Nm}$$

$$T = I \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{8}{0,25} = 32$$

$$a = R \cdot \alpha = 0,5 \cdot 32 = 16 \text{ m/s}^2$$

FEL.

$$\textcircled{2} \quad \begin{array}{l} 12 \text{ N} \\ \text{R} \\ \rightarrow 4 \text{ N} \end{array} \quad 12 + 4 = 2a \quad a = 8 \text{ m/s}^2$$

$$T = 12 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,5 = 4 \text{ Nm}$$

$$\alpha = \frac{4}{0,25} = 16 \text{ rad/s}^2$$

$$a = 0,5 \cdot 16 = 8 \text{ m/s}^2$$

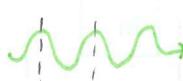
vill röda åt olika håll

RÄTT! Mäste stämna för båda krafter och vridande moment.

FÖRELÄSNING 27 19/5 VÅGOR

Rep.

$$m \rightarrow v \quad p = mv$$



de Broglies relation:

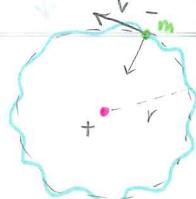
$$\lambda = \frac{h}{p}$$

eller

$$p = \hbar k$$

$$\hbar = \frac{h}{2\pi}$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

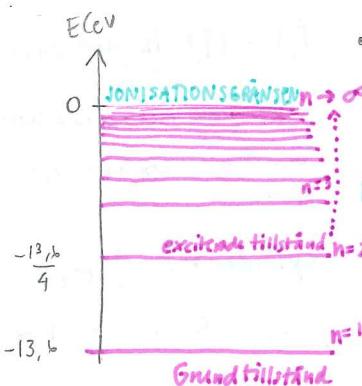


Bohrs atommodell (H)

$$E_{TOT} = \underbrace{\frac{mv^2}{2}}_{E_k} + \underbrace{\frac{-e^2}{4\pi\epsilon_0 r}}_{E_p}$$

$$\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$



$$E_{TOT} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r}$$

$$Nytt \text{ från Bohr: } 2\pi r = n \cdot \frac{h}{mv}, \quad n = 1, 2, \dots$$

samband mellan v + r

$$r = n^2 \cdot \frac{4\pi\epsilon_0 h^2}{me^2}$$

tillåtna banoradijer

$$r = n^2 \cdot 0,53 \text{ Å}$$

n är odd kvanttal

$$\underline{\text{KOM I TÅG: }} 1 \text{ Å} = 1 \cdot 10^{-10} \text{ m}, \quad 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$\Rightarrow E$ är kvantiserad

$$V = \frac{1}{n} \cdot 2,2 \cdot 10^6 \text{ m/s}$$

Högt $n \Rightarrow$ låg hastighet

Om en e^- är exciterad s.d. vill den flytta tillbaka till grundtillståndet, vilket den gör efter en "livslängd".

Då avges energi i form av en foton:

$$\frac{hc}{\lambda} = E_n - E_m$$

där n är det exciterade tillståndet & m är det e^- viu.

$$\text{Ex: } \frac{hc}{\lambda_{32}} = E_3 - E_2 = -\frac{13,6}{3^2} - -\frac{13,6}{2^2} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \cdot 13,6 \text{ eV} \Rightarrow \lambda_{32} = \frac{hc}{\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{9}\right) \cdot 13,6 \text{ eV}}$$

SCHRÖDINGEREKVATIONEN (S.E.)

- Partiklar beskrivs med en matematisk funktion, så man kan veta sannolikhetsställeten för hastighet, rörelsemängd och position vid ett visst tillfälle.
- Kallas vågfunktion (men behöver inte se ut som en våg). Tänk $f(x,y,z,t)$ men betecknas som $\Psi(x,y,z,t)$, och är en lösning till S.E.
- Är en diff.ekvation

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x,t)}{\partial x^2} + U(x,t) \cdot \Psi(x,t) = i\hbar \frac{\partial \Psi(x,t)}{\partial t}$$

$U = E_{\text{pot}} = \text{potentiell energi}$

$i = \sqrt{-1} = \text{imaginära enheten}$

$m = \text{partikels massa}$

$$U(x,t) = E_{\text{pot}} \text{ och beräknas klassiskt vis, t.ex. } U_{\text{H-atom}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

Hitta lösningar: $\Psi = \dots \Rightarrow$ hitta funktioner som satistierar S.E., ofta komplicerat, så datorer och numeriska metoder måste ofta till, med undantag för några enkla fall.

Om $U(x,t) = U(x)$ dvs. tidsoberoende potentiell energi (= alltid i denna kurs) så kan S.E separeras i en x-del och en tidsdel.

Sätt $\Psi(x,t) = \Psi(x) \cdot \Psi(t)$ in i SE och dividera med $\Psi(x) \cdot \Psi(t)$

$$\underbrace{-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + U(x)}_{\text{bara } x\text{-variabler}} + U(x) = i\hbar \underbrace{\frac{1}{\Psi(t)} \cdot \frac{d\Psi(t)}{dt}}_{\text{bara } t\text{-variabler}}$$

$\Psi = \text{stora psi}$
 $\psi = \text{lilla psi}$

d : funktion av en variabel

ð : funktion av flera.

$VL = HL = \text{konstant} = E$ (i mättet energi) \Rightarrow 2 diff. ekvationer

$$t: \frac{i\hbar}{E} \cdot \frac{d\Psi(t)}{dt} = \Psi(E) \Rightarrow \Psi(t) = C e^{-i \frac{E}{\hbar} t} = C e^{-i \omega t} \quad C = \text{konstant}$$

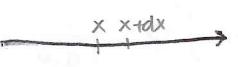
$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$x: -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2 \Psi(x)}{dx^2} + U(x) \cdot \Psi(x) = E \cdot \Psi(x) \quad \text{kallas tidsoberoende Schrödinger-ekvationen.}$$

Lösningarna $\Psi(x)$ bestäms av hur $U(x)$ ser ut.

$$3\text{-dim: } \left(-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\frac{d^2}{dx^2} + \frac{d^2}{dy^2} + \frac{d^2}{dz^2} \right] + U(x,y,z) \right) \Psi(x,y,z) = E \cdot \Psi(x,y,z) \Rightarrow \hat{H} \Psi = E \Psi$$

$\underbrace{\text{energi- / Hamiltonoperatorn } \hat{H}}_{\text{verkar på vågfunktionen}}$

- Ψ innehåller all info om partikeln, t.ex. hur mycket energi som finns i systemet, rörelsemängden etc.
- $|\Psi(x)|^2 dx$ = sannolikheten för att hitta partikeln mellan x och $x+dx$. 
- $|\Psi(x)|^2$ är en **sannolikhetstäthet**.
- E är totala energin.

Tre enkla fall:

1. H-atomen

2. Nanorör (= endimensionell potentiallåda, PiL)

3. Harmonisk oscillator

1. VÄTEATOMEN

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \quad \text{in i S.E och försök hitta lösningar}$$

Finns oändligt många lösningar, och dessa är komplicerade att räkna ut analytiskt.

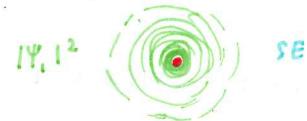
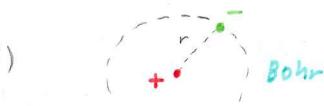
$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} \cdot e^{-r/a} \\ \text{där } a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,53\text{ Å} \text{ (samma som Bohr!)} \end{array} \right.$$

med tillhörande energi $E_1 = [\text{naturkonstanter}] = -13,6\text{ eV}$ (grundtillståndet)

Störst värde dd $r=0$, varpå sannolikhetstätheten är som störst vid kärnan.

En annan lösning

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_2 = \frac{1}{\sqrt{8\pi a^3}} \left[1 - \frac{r}{2a} \right] \cdot e^{-r/2a} \\ \text{med energin } E_2 = -\frac{13,6\text{ eV}}{4} \text{ (1:a exciterade tillståndet)} \end{array} \right.$$



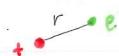
$r = 2a = 2 \cdot 0,53\text{ Å}$

FÖRELÄSNING 28 20/5 VÄGOR

Tidsberoende S.E :
$$-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U(x)\Psi(x) = E\Psi(x)$$
 $U = \text{potentiell energi}$

I denna kurs tittar vi på tre fall:

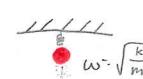
1. $U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$ dvs. H-atomen.



2. $U = \text{konstant} = U_0$ inuti ett tunnt rör. $U_{\text{pot}} = \infty$ utanför röret: 1-dim. potentiellkälla

$U = \text{konstant} \Leftrightarrow F = 0$

3. $U = \frac{1}{2}kx^2$ dvs. harmonisk oscillator



⇒ Stoppa in uttrycket för U och lös diff ekvationen.

1. REP. VÄTEATOMEN

∞ många lösningar

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi a^3}} e^{-r/a} \\ E_1 = -13,6\text{ eV} \end{array} \right. \quad \text{grundtillstånd}$$

$$|\Psi_1|^2 = \frac{1}{\pi a^3} e^{-2r/a} [\text{m}^{-3}] : \text{MAX när } r=0, \text{ dvs. vid kärnan.}$$

$$a = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0,53\text{ Å} \text{ (Bohrradien)}$$

Ex) Hur stor är sannolikheten att hitta e^- inuti atomkärnan? $R_{\text{kärna}} = 10^{-15}\text{ m} = 10^{-5}\text{ Å}$

Vi säger att $r=0$, fast egentligen borde det vara $0 < r < 10^{-5}$.

$$\underbrace{|\Psi_1(r=0)|^2}_{\text{sannolikhets-}\atop\text{tätheten}\atop\approx \text{likastor i}\atop\text{hela kärnan}} \cdot \underbrace{\frac{4\pi R^3}{3}}_{\text{volymen}\atop\text{av atom-}\atop\text{kärnan}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{4\pi R^3}{3} = \frac{1 \cdot (10^{-5}\text{ Å})^3}{a^3} = 10^{-15}$$

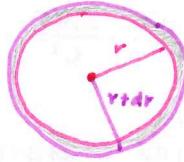
\uparrow
latsavatt
 $4 = 3$.

Ex) Hur stor är sannolikheten att hitta e^- inuti ett tunt skål mellan r och $r+dr$.

Sannolikhetstället är lika stort överallt ty skälet är så tunt.

$$|\Psi(r)|^2 \cdot 4\pi r^2 dr$$

$dV = \text{volymen av skälet.}$



Ex) $\Psi = \Psi_r$ (dvs. grundtilståndet)

$$\left| \frac{1}{r\pi a^3} e^{-r/a} \right|^2 \cdot 4\pi r^2 dr \Rightarrow \text{max } d\delta r = a$$

\therefore Mest sannolika avståndet mellan e^- och kärnan = a , men sannolikhetstället är som störst i kärnan.

Sannolikheten att hitta e^- utanför kärnan: $\int_0^\infty |\Psi|^2 \cdot 4\pi r^2 dr = 1$

— II — mellan r_1 och r_2 : $\int_{r_1}^{r_2} |\Psi|^2 \cdot 4\pi r^2 dr$

Andra lösningar ges när atomen är exciterad.

$$\Psi_2 = \dots$$

$$\Psi_3 = \dots$$

$$\Psi_4 = \dots$$

$$|\Psi|^2:$$



$$|\Psi|^2 = 0 \\ (e^- \text{ nu})$$



2. ENDIMENSIONELL POTENTIALLÄDA (PIL)

Tänk kanorör eller tunt sugrör med en partikel inuti som är helt fri att röra sig mellan ändarna.

Klassiskt: studerar elastiskt mellan väggarna med alla hastigheter tillåtna.

Kvantmekaniskt: Lös S.E. med $U = U_0 = \text{konstant}$, t.ex. sätt $U=0$ (inuti rörct)

$U = \infty$ utanför rörct

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + U_0 \Psi(x) = E \Psi(x)$$

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

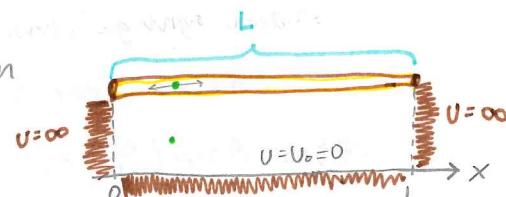
Inför beteckningen k^2 för $\frac{2mE}{\hbar^2}$

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + k^2 \Psi(x) = 0$$

RANDVILLKOR

$$\Psi(x) = A \sin kx + B \cos kx \quad (\text{allmän lösning})$$

Randvillkor: $\Psi=0$ vid ändarna, ty Ψ ska vara kont. och $\Psi=0$ utanför



$$\textcircled{1} \quad \Psi(x=0) = 0 \Rightarrow B = 0 \quad B \cos 0 = 1$$

$$\textcircled{2} \quad \Psi(x=L) = 0 \Rightarrow A \sin kL = 0 \\ \Rightarrow \sin kL = 0 \quad (\text{ty } A \neq 0)$$

$$kL = n \cdot \pi \quad ; \quad n=1,2,3$$

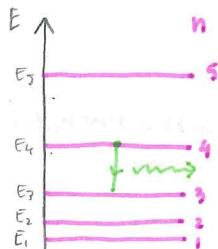
OBS! $n=0$ ej ok ty då blir $\Psi=0$

$$\therefore k = n \cdot \frac{\pi}{L} ; n=1,2,3, \dots$$

men $k^2 = \frac{2mE}{\hbar^2} \Rightarrow E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m} = \frac{\hbar^2 \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{2m} = \frac{\left(\frac{n\pi}{2m}\right)^2 \cdot \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2}{2m} = n^2 \cdot \frac{\hbar^2}{8mL^2}$

Möjliga energier: $E = n^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2} \Rightarrow$ Kinetisk energi, ty $E = E_k + U$ om $U=0$

Grund tillståndet: $n=1 \Rightarrow E_1 = 1^2 \frac{\hbar^2}{8mL^2}$



e^- kan hoppa mellan energinivåer \Rightarrow fotoner emitteras när e^- exciteras. Kan konstruera hanorär så man får önskat ljus.

$$hf_{43} = E_4 - E_3 = (4^2 - 3^2) \cdot \frac{\hbar^2}{8mL^2}$$

Om $U = U_0 \neq 0$ så får vi $E - U_0 = n^2 \cdot \frac{\hbar^2}{8mL^2} \Rightarrow$

$$E = U_0 + \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2}$$

↑ total energi ↑ pot. energi

Möjliga värden på v :

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{n^2 \hbar^2}{8mL^2} \Rightarrow v = \frac{n \cdot \hbar}{2mL}$$

Lägst fart då $n=1$.

Ex) hanorär: $L=1\text{ nm}$, $e^- \cdot m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg} \Rightarrow v_1 = \frac{1 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 9.1 \cdot 10^{-31} \cdot 1 \cdot 10^{-9}} \text{ m/s} = 10^5 - 10^6 \text{ m/s}$

Ex) ärta ($m=1\text{ g}$) i sngrör ($L=1\text{ m}$) $\Rightarrow v = \frac{1 \cdot 6.63 \cdot 10^{-34}}{2 \cdot 10^{-3} \cdot 1} \text{ m/s} = 10^{-30} \text{ m/s}$

\Rightarrow skulle ta 10^{20} s att röra sig en atomlänga (1 \AA). Alltså är det svårt att studera synliga "stora" objekt, för de rör sig JÄTTElångsamt.

$\Psi(x) = A \sin(kx)$ där $k = \frac{n\pi}{L}$

$\Psi(x) = A \sin\left(\frac{n\pi}{L} \cdot x\right) \Rightarrow$ Bestäm A för att kunna hitta partikelns position

$\int_0^L |\Psi|^2 dx = 1 \Rightarrow$ partikeln finns nögonstans i röret (normaliseringssätt)

sannolikheten
att hitta partikeln
mellan x och dx

$$\int_0^L A^2 \sin^2\left(\frac{n\pi}{L} x\right) dx = A^2 \int_0^L \frac{1 + \cos\left(\frac{2n\pi}{L} x\right)}{2} dx = A^2 \cdot \frac{L}{2} = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$

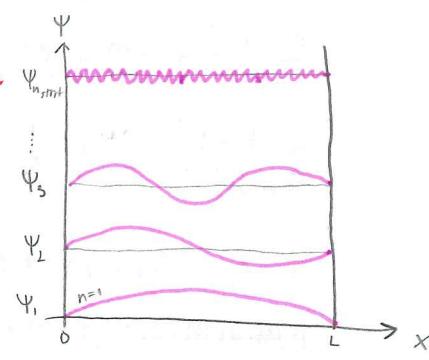
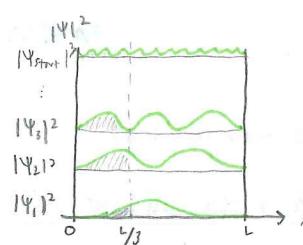
$$\therefore \boxed{\Psi(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \cdot \sin\left(\frac{n\pi}{2} x\right)}$$

$n = 1, 2, 3, \dots$

Sannolikheten för att hitta e^- i visst intervall: integrera!

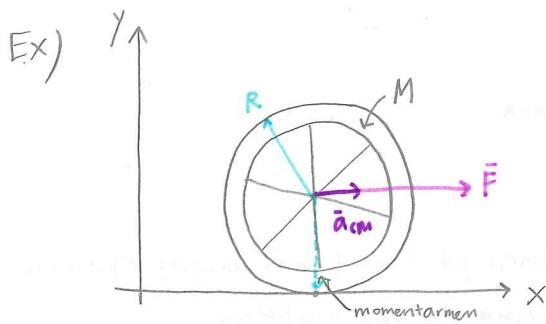
$n = \text{start tal} \Rightarrow$ klassisk fysik.

Den normerade vågfunktionen



FÖRELÄSNING 29

20/5 MEKANIK



$$\bar{F} = f\hat{i} \quad F = +10N$$

$$M = 10 \text{ kg}$$

$$R = 0,30 \text{ m}$$

$$\bar{a}_{cm} = 0,60 \text{ m/s}^2$$

SÖKT:

a) f : storlek & riktning

b) I

För alla roterande moment:

$$\sum \bar{F}_i = M\bar{a}_{cm} \quad (1)$$

$$\sum \bar{T}_i = I\bar{\alpha} \quad (2)$$

$$\vec{a}_{cn} = -R\alpha \quad (3)$$

Eftersom \bar{F} har angrepps punkt i mittan kan den inte åstadkomma rotation, så för att få rotation måste f vara riktad åt vänster.

Om \bar{F} inte är i mittan ger den upphov till rotation, och då vill f motverka det.

a) $\bar{f} = f\hat{i} \Rightarrow$ tecknen på f angör riktning

$$(1) \text{ ger } \bar{F} + \bar{f} = M\bar{a}_{cm}$$

$$F\hat{i} + f\hat{i} = M a_{cm}\hat{i} \quad \text{Foch } a_{cm} \text{ är positiva} \Rightarrow \text{väljer att ta bort } \hat{i}$$

$$F + f = Ma_{cm} \Rightarrow f = Ma_{cm} - F = 10 \cdot 0,6 - 10 = -4 \text{ N}$$

(2) $\bar{T} = \bar{r} \times \bar{F}$, här är $r = R(-\hat{j})$ ty pekar mot y-axeln, $\bar{F} = f\hat{i}$

$$\bar{T} = R(-\hat{j}) \times f\hat{i} = Rf(-\hat{j} \times \hat{i}) = Rf(\hat{k})$$

$$\bar{T} = Rf(\hat{k}) = I\alpha(\hat{k}) \quad (\alpha \text{ är } \hat{k} \text{ för att = skrämmann})$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{Rf}{I} \quad \text{men } \alpha = -\frac{a_{cm}}{R}$$

$$-\frac{a_{cm}}{R} = \frac{Rf}{I} \Rightarrow f = -\frac{a_{cm} \cdot I}{R^2}$$

$$b) I = -\frac{fR^2}{a_{cm}} = -\frac{(-4)0,30^2}{0,6} = 0,6 \text{ kgm}^2$$

$$I_t = \frac{1}{2}MR^2 = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 0,30^2 = 0,45 \text{ kgm}^2 \quad \text{teoretiskt för fylld cylinder}$$

I blir större för hjul med $m=10 \text{ kg}$ än cylindrar med samma massa, ty massa i periferin är mer värd än massa i mittan. Man kan alltså inte behandla hjul som cylindrar.

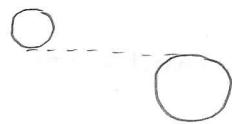
$$\begin{cases} \alpha > 0 : \odot \\ \alpha < 0 : \odot \end{cases}$$

\hat{k} används ENSLÄJT för att bestämma tecknen.

KOM IHÅG: Hitta alltid momentarmen, dvs. komponenten \perp mot \bar{F} .

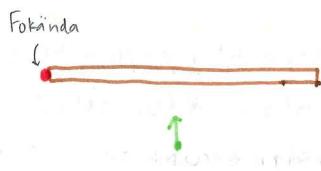
När bevaras rörelsemängdsmomentet, \bar{L}_{syst} ?

i) Inga yttrre nettokrafter alls.

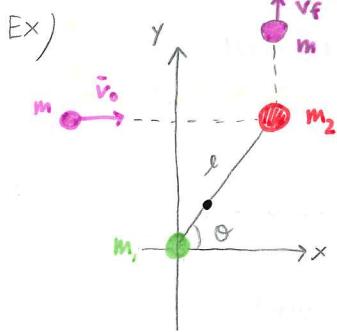


puckar som rör sig mot varandra.

ii) När yttrre krafter kan "trollas bort", genom att vi räknar på \vec{T} och \vec{l} map angreppspunkten för de extrema okända krafterna.



gevärskula skjuts mot dörr. F_{ext} verkar på x -axeln, dvs. momentarmen = 0 varpå vridmomentet $\vec{T} = 0$.



$$\begin{aligned} m &= 0,5 \text{ kg} \\ v_0 &= 2 \text{ m/s} \\ v_f &= 1 \text{ m/s} \\ l &= 0,30 \text{ m} \\ \theta &= 30^\circ \\ m_1 &= 4 \text{ kg} \\ m_2 &= 2 \text{ kg} \end{aligned}$$

SÖKT:

$$\bar{v}_{\text{CM}}$$

$$w$$

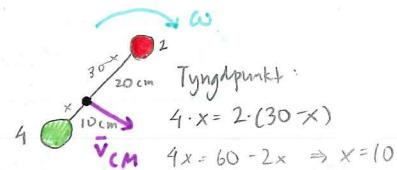
står stilla från början
för systemet $m_1 - m_2$ som binds ihop
med masslös stav. Inga externa krafter, ty
glatt is.

$$\bar{v}_{\text{CM}}: \bar{p}_i = m \bar{v}_0 = m v_0 \hat{i} \text{ ty rörelse i positiv riktning mot } x\text{-axeln.}$$

$$\bar{p}_f = m \bar{v}_f + (m_1 + m_2) \bar{v}_{\text{CM}} = m v_f \hat{j} + (m_1 + m_2) \bar{v}_{\text{CM}}$$

$$\Rightarrow \bar{v}_{\text{CM}} = \frac{1}{m_1 + m_2} (m v_0 \hat{i} - m v_f \hat{j}) = \frac{m}{m_1 + m_2} (v_0 \hat{i} - v_f \hat{j}) =$$

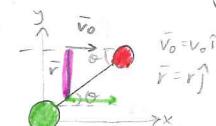
$$= \frac{0,5}{4+2} (2\hat{i} - 1\hat{j}) = \frac{\hat{i}}{6} - \frac{\hat{j}}{12} \quad (\text{ty } \bar{p}_i = \bar{p}_f)$$



$\sum p$ för rotande pinne = 0 runt CM.

w: Inga yttrre krafter gör att $M\bar{a}_{\text{cm}} = 0$ dvs $\ddot{a}_{\text{cm}} = 0$, varpå det MÅSTE rotera kring tyngdpunkten.
Rörelsemängd OCH rörelsemängdsmoment bevaras.

$$\bar{L} = \bar{r} \times m \bar{v}$$



Eftersom \bar{L} är konstant väljer vi avståndet \bar{r} från masscentrum till \perp mot \bar{v}_0 .

$$\bar{L}_i = \left(\frac{2}{3}l\right) \sin \theta \cdot m \bar{v}_0 (-\hat{k})^{0,10(-k)} \text{ ty medurs rotation} \quad \bar{r}_i \times \bar{v}_0 = r_i \hat{j} \times v_0 \hat{i} = r_i v_0 (-\hat{k})$$

$$\bar{L}_f = \bar{L}_{mf} = \bar{L}_{\text{star}}$$

$$\bar{L}_{mf} = \left(\frac{2}{3}l\right) \cos \theta \cdot m \bar{v}_f (+\hat{k})^{0,0866(+k)} \text{ ty moturs: } \bar{r} \parallel \hat{i}, \bar{v}_f \parallel \hat{j}, \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\bar{L}_{\text{star}} = I \bar{\omega} \quad \text{där } I = I_{m_2} + I_{m_1} = m_2 \left(\frac{2}{3}l\right)^2 + m_1 \left(\frac{l}{3}\right)^2 = 0,12 \text{ kgm}^2$$

$$\bar{\omega} = \omega (\hat{k}) = \frac{-0,10 - 0,0866}{0,12} \hat{k} \Rightarrow \omega = -1,55 \text{ rad/s}$$

FÖRELÄSNING 30 2215 VÅGOR

Rep: Schrödinger-ekvationen

$$\hat{H}\Psi = E\Psi$$

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + U \quad (\text{Hamiltonoperatorn})$$

1-dim. potentialladda

- ärtä i sugrör

- e⁻ i nanorör

- e⁻ i långsträckt molekyl



$$U = U_0 = \text{konstant i röret}$$

$$U = \infty \text{ utanför röret}$$

e⁻ kan bara ha vissa särskilda energier, kvantmekaniskt uträknade, dvs. vissa särskilda hastigheter härtomt vad man kan tänka om man skulle räkna med klassisk mekanik.

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} = E\Psi(x)$$

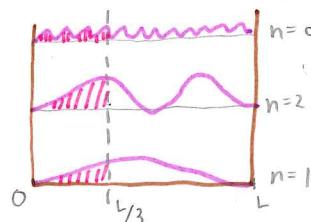
$$\Rightarrow \Psi(x) = A \sin\left(\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} x\right)$$

$$\frac{d^2\Psi(x)}{dx^2} + \frac{2mE}{\hbar^2} \Psi(x) = 0$$

Kan ha cos istället för sin, men ritar bort cos-termen genom att tänka att $\Psi(0) = 0$, men $\cos 0 = 1 \Rightarrow$ konstant framför cos som är 0, så därför försinner cos-termen.

$$\sqrt{\frac{2mE}{\hbar^2}} \cdot L = n\pi L ; n=1,2,3\dots \Rightarrow E = \frac{n^2\hbar^2}{8mL^2}$$

$$A \int_0^L |\Psi(x)|^2 dx = 1 \Rightarrow A = \sqrt{\frac{2}{L}}$$



$$|\Psi_n|^2$$

Sannolikheten att hitta partikeln mellan $x=0$ och $x=\frac{L}{3}$:

$$\int_0^{L/3} |\Psi(x)|^2 dx = \frac{2}{L} \int_0^{L/3} \frac{1 - \cos \frac{2\pi n}{L} x}{2} dx = \frac{1}{3} - \frac{1}{2n\pi} \sin\left(\frac{2\pi n}{L} \cdot \frac{L}{3}\right)$$

$$\begin{aligned} n=1 &: 19,5\% \\ n=2 &: 40,2\% \\ n \rightarrow \infty &: 33,3\% \left(\frac{1}{3}\right) \end{aligned}$$

Korrespondensprincipen:

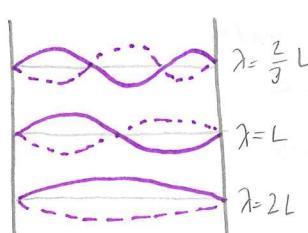
När $n \rightarrow \infty$ närmar sig kvantmekaniken den klassiska fysiken.



$$E_n = \frac{n^2\hbar^2}{8mL^2}$$

⇒ ökat L ger tätare energinivåer, och tillräckligt stort L ger så tätta nivåer att vi inte upplever kvantiseringen. Därför går vi över från klassisk fysik när vi går över till makroskopisk skala (nm).

Ständande vågor på fiolesträng



$$\lambda = \frac{2L}{n}; n=1,2,3$$

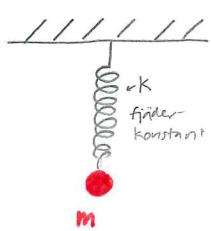
$$\lambda = \frac{L}{mv} = \frac{L}{P} \Rightarrow P = \frac{h}{\lambda}$$

$$\left. \begin{aligned} P &= \frac{h}{2L} = \frac{hn}{2L} \\ \Rightarrow E_k &= \frac{mv^2}{2} = \frac{m^2v^2}{2m} = \frac{P^2}{2m} = \frac{\left(\frac{hn}{2L}\right)^2}{2m} = \frac{n^2\hbar^2}{8mL^2} \end{aligned} \right\}$$

$$\Rightarrow E_{kin} = \frac{n^2\hbar^2}{8mL^2}$$

KUNNA HÄV: Dirac-ekvationen används istället för Schrödinger-ekv. för relativistiska partiklar ($v \rightarrow c$ ljust)

Harmonisk oscillator



$$E_{\text{pot}} = \frac{kx^2}{2} = U \Rightarrow \text{sätt in i S.E.: } \hat{f} \Psi = E\Psi \Rightarrow \frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 \Psi(x)}{\partial x^2} + \frac{kx^2}{2} = E\Psi(x)$$

$$\Rightarrow E = (n + \frac{1}{2})\hbar\sqrt{\frac{k}{m}} ; n = 0, 1, 2, \dots \quad \text{där } k = \text{fjäderkonstanten}$$

$$E_{\text{grundtillstånd}} = [n=0] = \frac{\hbar}{2}\sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \text{Även i grundtillståndet har vi alltså en närliggande fänrikställighet för en partikel}$$

Denna modell används för att illustrera e- på t.ex. metallebit. Även om metallen kyls ner till 0,0K så kommer det finnas en kvantmekanisk svängningsrörelse.

Elektroner mot dubbelspalt

1e-/minut
→ |

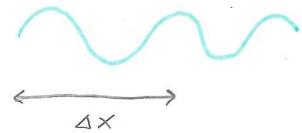


Vi skickar $1e^-$ i minuten mot skärmen, och får en interferens. Varje e^- måste gå igenom båda spaltena så att mönsteret kan uppstå. Sålunda måste vi se e^- som vågor.

Heisenbergs osäkerhetsrelation

$$\Delta X \cdot \Delta p \approx \hbar$$

Om partiklar ses som vågor vet man ju inte var i vadun partikeln finns. Kan inte räta både rörelsemängd och lämplikt.



$$\Delta E \cdot \Delta t \approx \hbar$$

Kan laddna E avrakuum i mängden $\frac{\hbar}{\Delta t}$, om $\Delta t < 0$ så får vi lite energi.

REPETITION AV KURSEN

① Mekaniska vågor

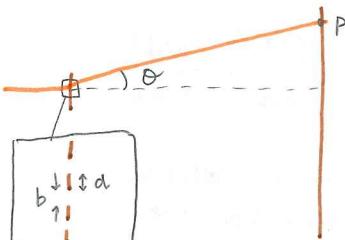
$$s(x,t) = s_0 \underbrace{\sin(\omega t - kx + \varphi)}_{\text{elongation}} \quad \text{Fortskrivande våg} \quad \text{Ex) Ljudvåg}$$

$$s(x,t) = s_0 \sin(kx - \alpha) \cdot \sin(\omega t + \beta) \quad \text{Ständende våg} \quad \text{Ex) öppna & slutna pipor, fiolsträng}$$

$$\text{Partikelhastighet: } v_{\text{part}} = \frac{\partial s}{\partial t}, a_{\text{part}} = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

② EM-vågor

Gitter



$$I_p = I_0 \frac{\sin^2(\beta/2)}{(\beta/2)^2} \cdot \frac{\sin^2(N\gamma)}{\sin^2(\delta/2)}$$

N-2 st. sekundärmax.

N = antal spalter

$$\beta = kb \sin \theta, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda}$$

$$\gamma = kds \sin \theta$$

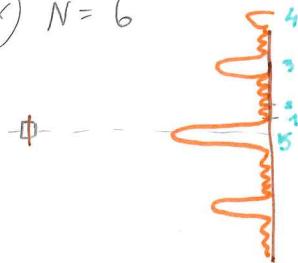
Enkelspalt ($N=1$)



MIN när $\beta/2 = \pi \Rightarrow I_p = 0$

MAX när $\beta/2 = 0 \Rightarrow I_p = I_0$ ty $\frac{\sin x}{x} \rightarrow 1$ då $x \rightarrow 0$

Ex) $N = 6$

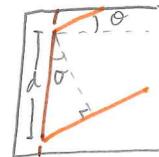


$$1. \gamma = \frac{2\pi}{6} \quad (\frac{N\gamma}{2} = \frac{6}{2} \cdot \frac{2\pi}{6} = \pi)$$

$$2. \gamma = \frac{4\pi}{6}$$

$$3. \gamma = 2\pi$$

$$4. \gamma = 4\pi$$



$$\Delta x = d \sin \theta$$

$$\gamma = k \Delta x = k d \sin \theta$$

↳ fasdifferens

5. 0:e ordningens principalmax
 $\delta = 0 \Rightarrow$ fasdiff. mellan utgående strålar.



⇒ Repetera tunna skikt och polariserat ljus på egen hand.

