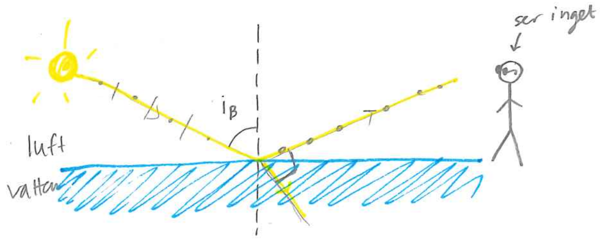
Ex) Står vid horisonten och blickar ut över det spegelblanka havet. Vid vilken höjd ska solen stå för att vi ska se plan. pol. ljus.

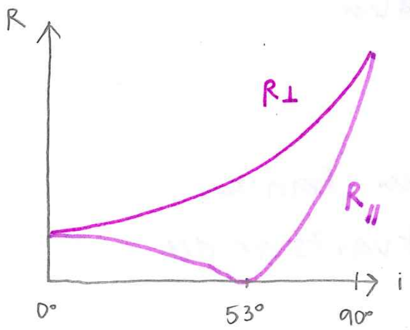


$i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1} = \arctan \frac{1{,}33}{1} \approx 53°$

SVAR: 53°

Mellan 0° och 90° går det alltid igenom mest ljus som är ⊥ planpolariserat ⇒ om man studerar reflektioner när solen förflyttar sig på himlen.

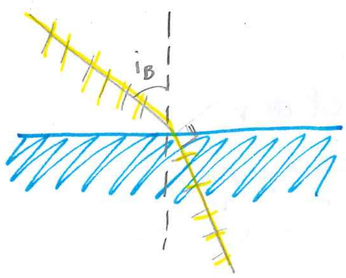
Ex) Räkna ut värden på $R_{\parallel}$ och $R_{\perp}$ för olika i



Från luft till vatten.

$R_\perp > R_\parallel$ på hela intervallet.

Ex) Skicka ∥-planpolariserat ljus mot vattenyta med infallsvinkeln i_B.



Inget ljus reflekteras om det infallande ljuset är planpolariserat så bara ∥ finns och infallsvinkeln är i_B.

Framställning av cirkulärpolariserat ljus

Sker mha dubbelbrytande kristall (t.ex. kvarts, kalkspat, glimmer, tejp...)

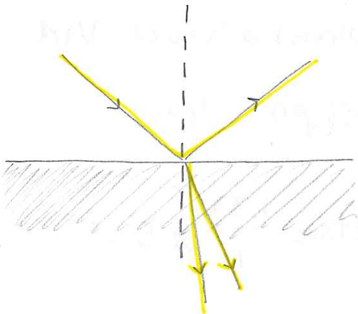
med en tjocklek $\boxed{d = \frac{\lambda}{4 \cdot |n_{eo} - n_o|}}$

n_o = ordinärt brytningsindex

n_{eo} = extraordinärt brytningsindex

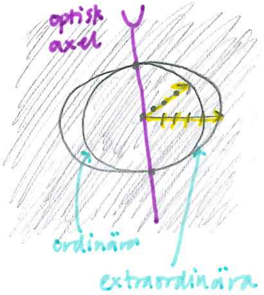
Fungerar enligt följande:

2 ljushastigheter (dvs. 2 brytningsindex n_{eo} och n_o) beroende på hur E-vektorn svänger i förhållande till den optiska axeln.



Två brytningsindex ger två brutna strålar med olika vinklar b.

Optisk axel

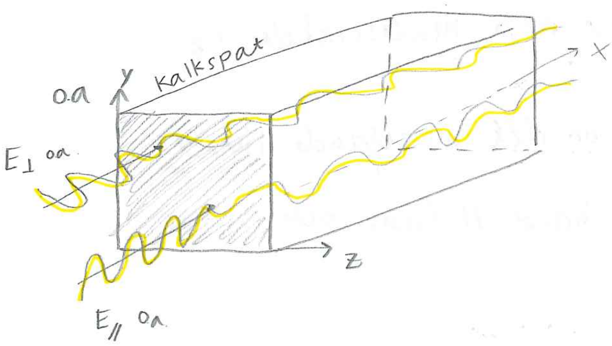


Tänk att du bränner av en ljusblixt i centrum av t.ex. kalkspat vid $t=0$. Vid $t=t$ observeras två ljusfronter som tangerar varandra på två ställen. Den räta linjen genom dessa två punkter och mitten ger den optiska axeln.

o : $\mathbb{E}$-vektorn $\perp$ mot planet genom o.a. och strålen.

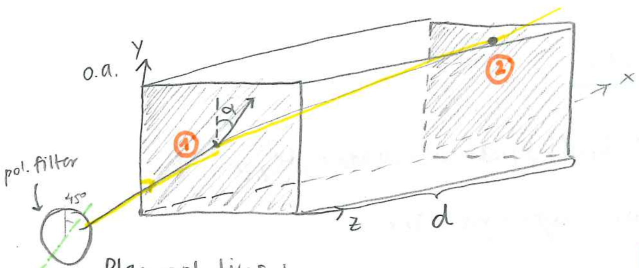
eo : $\mathbb{E}$-vektorn // med ovan givna plan

I kalkspat får man en negativ kristall där den sfäriska vågfronten ligger i den ickesfäriska. I t.ex. kvarts är det tvärtom, och man får en positiv kristall



Vågorna ut ur rätblocket har olika hastighet

Längden på rätblocket ger olika mycket fasförskjutning.



Plan.pol. ljus i x-axelns riktning med polplanet lutandes med vinkeln α rel. o.a.

① Vid $x=0$ (inträdet, planpol.)

$$\begin{cases} E_y = E_0\cos\alpha \cdot \sin(\omega t - k\cdot 0) \\ E_z = E_0 \sin\alpha \cdot \sin(\omega t - k\cdot 0) \end{cases}$$

$E_{0y} = E_0 \cos\alpha$ ingen fasskillnad!

② Vid $x=d$ (utträde)

$$\begin{cases} E_y = E_0\cos\alpha \cdot \sin(\omega t - k_{eo} d) \\ E_z = E_0 \sin\alpha \cdot \sin(\omega t - k_o d) \end{cases}$$

OBS! 2 olika k ty olika brytningsindex n_{eo} och n_o.

$\lambda_{eo} = \frac{\lambda}{n_{eo}}$ $\quad k_{eo} = \frac{2\pi}{\lambda_{eo}}$

$\lambda_o = \frac{\lambda}{n_o}$ $\quad k_o = \frac{2\pi}{\lambda_o}$

Fasdifferensen $\Delta\phi = (\omega t - k_{eo} d) - (\omega t - k_o d) = (k_o - k_{eo}) d$

Vi vill att $\begin{cases} \Delta\phi = \frac{\pi}{2} + n\cdot\pi & \text{för att få cirkulärpolariserat ljus} \\ E_{oy} = E_{oz} \Rightarrow \alpha = 45^\circ \end{cases}$

↳ åstadkoms genom att vrida filtret 45°.

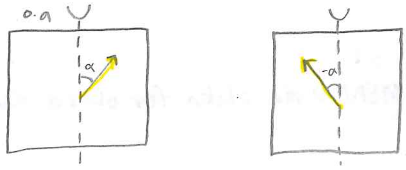
$$(k_o - k_{eo}) d = \frac{\pi}{2}$$

$$\left(\frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} n_o - \frac{2\cancel{\pi}}{\lambda} n_{eo}\right) d = \frac{\cancel{\pi}}{2} \Rightarrow \boxed{d = \frac{\lambda}{4|n_o - n_{eo}|}}$$

Tjockleken av dubbelkristallen.

Kallas $\frac{\lambda}{4}$-platta

Om $d = \frac{\lambda}{2|n_o - n_{eo}|}$ ($\frac{\lambda}{2}$-platta) så blir fasförskjutningen 180°.



framsidan
planpol

baksidan
planpol

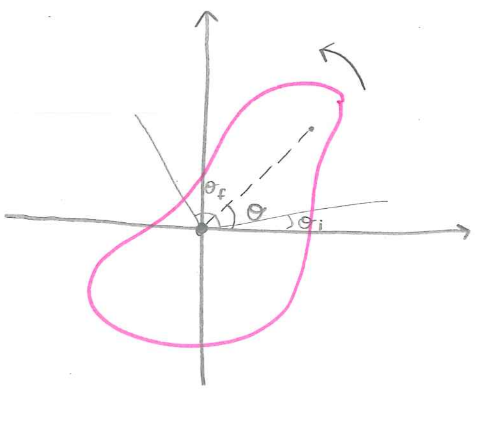
$\sin(v + 180^\circ) = \sin(-v)$

speglar $\mathbb{E}$-vektorn i optiska axeln.

Om d inte är precis enligt formeln ovan så får man istället elliptiskt polariserat ljus. Dock så är d anpassat efter λ, så om man har en kristall anpassad för gult ljus så blir det gula ljuset cirk. pol medan t.ex. rött ljus blir elliptiskt pol. Kombination av kristall och polaroidfilter gör att man kan få olika färgmönster när filtrena vrids.

FÖRELÄSNING 21 6/5. MEKANIK

STELA KROPPARS ROTATION KRING FIX AXEL



Läge:

θ	x
$\omega = \frac{d\theta}{dt}$	$v = \frac{dx}{dt}$
$\alpha = \frac{d^2\theta}{dt^2}$	$a = \frac{d^2x}{dt^2}$

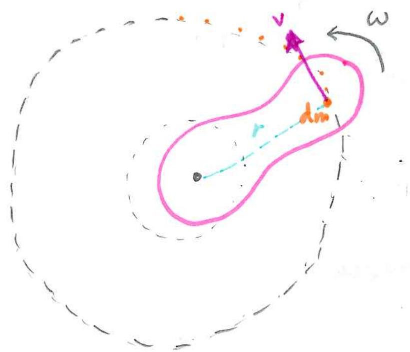
$$\boxed{\begin{aligned} x_f - x_i &= v_0 t + \tfrac{1}{2} a t^2 \\ \theta_f - \theta_i &= \omega_0 t + \tfrac{1}{2} \alpha t^2 \\ v_f^2 - v_i^2 &= 2a(x_f - x_i) \\ \omega_f^2 - \omega_i^2 &= 2\alpha(\theta_f - \theta_i) \end{aligned}}$$

$v_f - v_i = at \Rightarrow \omega_f - \omega_i = \alpha t$

⇒ Saker och ting i rotationsvärlden har motsvarigheter inom den stela mekaniken. I rotationsmekaniken utgår man från θ istället för x.

⇒ Massa är en kroppsmotstånd mot att bli accelererad, men massan har inte lika stor betydelse inom rotation ⇒ räknar med tröghetsmoment.

TRÖGHETSMOMENT, I

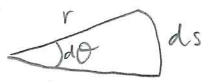


Olika delar av kroppen flyttar sig olika långt.

Totala rörelseenergin:

$$K_R = \int_{\text{hela kroppen}} dK_R = \int \frac{1}{2} dm\, v^2$$

MEN v är olika för olika dm



$ds = r \cdot d\theta$ (def. av radianer) $\Rightarrow \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \Rightarrow v = \omega r$

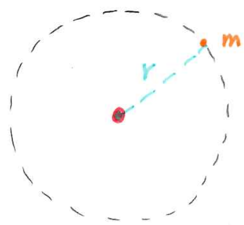
$$K_R = \int \frac{1}{2} dm\, \omega^2 r^2 = \frac{1}{2}\omega^2 \int_{\text{hela kroppen}} r^2 dm$$

inte egenskap av kroppen

egenskap av kroppen

$$\Rightarrow \boxed{I = \int r^2 dm} \quad [\text{kgm}^2]$$

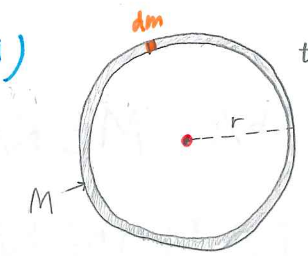
i)



$I = mr^2$

Samma avstånd till centrum hela tiden.

ii)

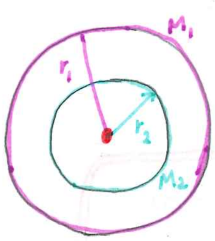


tunn ring

m.a.p. axel vinkelrätt ut ur pappret

$I = \int r^2 dm = r^2 \int dm = Mr^2$

iii)

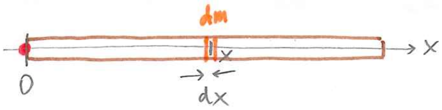


Två ringar ⇒ tröghetsmomentet för de två adderas.

$I = M_1 r_1^2 + M_2 r_2^2$

⇒ ADDITIV STORHET

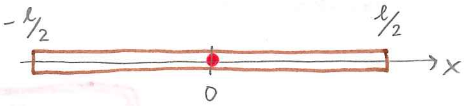
iv)

Ⓐ 

Smal pinne med längden ℓ, massan m och försumbar bredd. Tittar på fragment med massa dm på avstånd x från rotationsaxeln.

$$\frac{dm}{m} = \frac{dx}{\ell} \Rightarrow dm = \frac{m}{\ell} dx$$

$$I_A = \int_0^{\ell} dm \cdot x^2 = \int_0^{\ell} \frac{m}{\ell} x^2 dx = \frac{m}{\ell}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^{\ell} = \frac{1}{3} m\ell^2$$

Ⓑ 

$$I_B = \int_{-\frac{\ell}{2}}^{\frac{\ell}{2}} dm\, x^2 = \int_{-\ell/2}^{\ell/2} \frac{m}{\ell} x^2\, dx = \frac{m}{\ell}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_{-\ell/2}^{\ell/2} = \frac{m}{\ell}\cdot\frac{1}{3}\left(\left(\frac{\ell}{2}\right)^3 - \left(-\frac{\ell}{2}\right)^3\right) = \frac{1}{12} m\ell^2$$

$\Rightarrow$ Tröghetsmomentet blir mindre när man väljer rotationsaxeln en bit in på pinnen eftersom de små masselementen befinner sig närmre r.a. i Ⓑ än i Ⓐ. Tänk  vs 

Parallellförskjutningssatsen

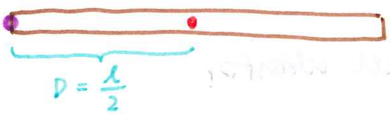
$$\boxed{I = I_{CM} + MD^2}$$

M = kroppens massa

D = avståndet mellan rot. axeln & tyngdpunkten.

I_{CM} = tyngdpunkten

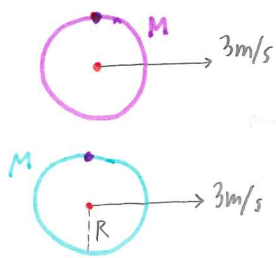
Vi kollar med vårt exempel.



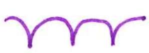
$I_{CM} = \frac{1}{12} m\ell^2$ (homogen pinne)

$$I_{\bullet} = \frac{1}{12} m\ell^2 + m\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = m\ell^2\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{3} m\ell^2$$

Alla axlar måste vara parallella med rotationsaxeln genom tyngdpunkten för att denna sats ska gälla. Axlar kan befinna sig utanför

Ex) 

kanar. • och • rör sig samtidigt $\Rightarrow$ samma rörelseenergi

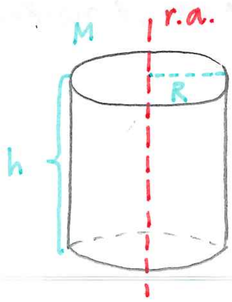
rullar. • måste röra sig  $\Rightarrow$ kräver mer energi än •

samma massa och radie.

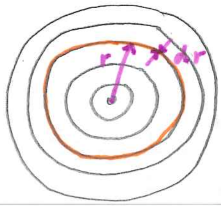
$v_{CM} = R\omega$

$$K_{TOT} = \underline{\frac{1}{2} M v_{CM}^2} + \underline{\frac{1}{2} I\omega^2}$$

I för cylinder



Vi tittar ovanifrån:



Tänker cylindern som oändligt många tunna cylindrar med höjden h och tjockleken dr.

Höjden påverkar egentligen bara massan.

dI = bidraget från ◯ $= dm \cdot r^2$

Hade varit bra att veta densiteten för att kunna veta dm: $\boxed{\rho = \frac{M}{\pi R^2 h}}$

Volymen av ◯: $dV = \underbrace{2\pi r}_{\text{omkrets}} \underbrace{h}_{\text{höjd}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{tjocklek}}$

Massan av ◯: $dm = \rho \cdot dV = \frac{M}{\cancel{\pi} R^2 \cancel{h}} \cdot 2\cancel{\pi} r \cancel{h} \cdot dr = \frac{2M}{R^2} \cdot r\,dr$

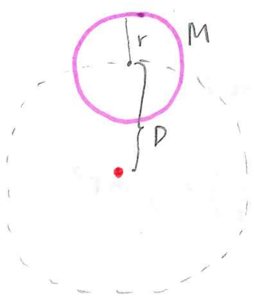
OK att stryka höjden eftersom informationen om den ingår i massan.

$\therefore\; dI = \frac{2M}{R^2} \cdot r^3\,dr$

$$I = \int dI = \frac{2M}{R^2} \int_0^R r^3\,dr = \frac{2M}{R^2} \left[\frac{1}{4} r^4\right]_0^R = \frac{1}{2} MR^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{2} MR^2}$$

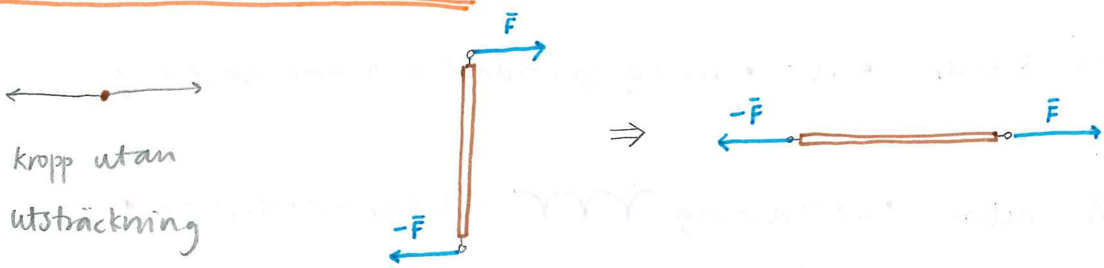
Ex)



$I = \frac{1}{2} MR^2 + MD^2$

Skiva som roterar kring axel utanför kroppen.

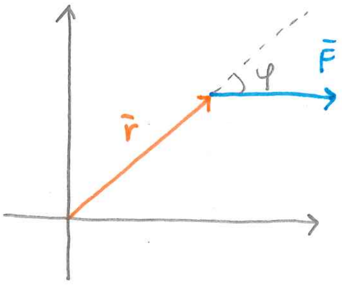
VRIDANDE MOMENT, $\bar{\tau}$ (tao)



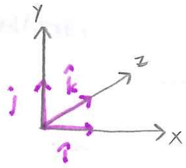
DEFINITION: $\bar{T} = \bar{r} \times \bar{F}$ (kryssprodukt)

$|\bar{T}| = |\bar{r}||\bar{F}| \sin\varphi$

Om φ är 0°, 180° eller 360° blir $\bar{T} = 0$, max uppnås när $\varphi = 90°$ eller 270°



KRYSSPRODUKT



$\hat{\imath} \times \hat{j} = \hat{k}$

$\hat{j} \times \hat{\imath} = -\hat{k}$

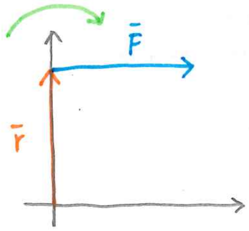
$+ \longrightarrow$

$\hat{\imath}\ \hat{j}\ \hat{k}\ \hat{\imath}\ \hat{j}\ \hat{k}$

$\longleftarrow -$

hur man tänker kryssprodukter mellan enhetsvektorerna

Medursrotation



$$\left.\begin{array}{l} \bar{r} = r\hat{j} \\ \bar{F} = F\hat{\imath} \end{array}\right\} \bar{T} = (r\hat{j}) \times (F\hat{\imath}) = rF(\hat{j} \times \hat{\imath}) = rF(-\hat{k})$$

$\Rightarrow$ negativ rotation för medursrotation

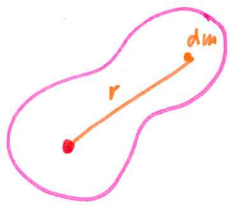
positiv rotation för motursrotation

FÖRELÄSNING 22 8/5 MEKANIK

Rep: MOMENT

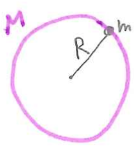
Tröghetsmoment, I

- Måste välja rotationsaxel



$$\boxed{I = \int r^2\,dm}$$

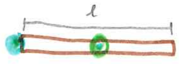
Punkt & ring



$I = mR^2$

$I = MR^2$

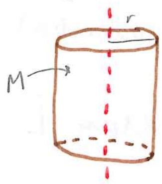
Pinne



$I = \frac{1}{12} Ml^2$ mitten

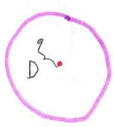
$I = \frac{1}{3} Ml^2$ änden

Cylinder



$I = \frac{1}{2} MR^2$

Rotation kring godtycklig punkt: $\boxed{I = I_{cm} + MD^2}$

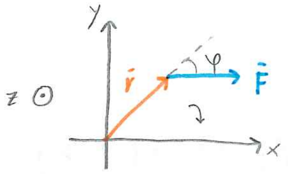


ROTATION	PARTIKEL	
I	m	
θ	x	läge
ω	v	hastighet
α	a	acceleration
$K = \frac{1}{2} I \omega^2$	$K = \frac{1}{2} m v^2$	rörelseenergi

⋮

Vridande moment, $\bar{\tau}$

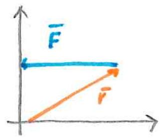
$$\boxed{\bar{\tau} \equiv \bar{r} \times \bar{F}}$$



$|\bar{\tau}| = |\bar{r}||\bar{F}| \sin\varphi$

Störst vridande moment när $\varphi = 90°$

sämst —||— $\varphi = 0°$



$\rightarrow \bar{\tau} \parallel \hat{k}$

$\downarrow$

$\bar{\tau} \parallel -\hat{k}$

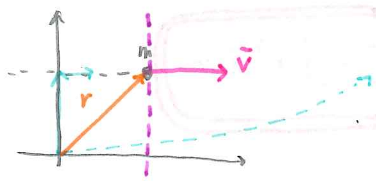
Negativt $\bar{\tau}$ $\Rightarrow$ rotation medurs

Positivt $\bar{\tau}$ $\Rightarrow$ rotation moturs

τ	F
$\tau = I\alpha$	$F = ma$
$L = I\omega$	$p = mv$

Rörelsemängdsmoment, $\bar{L}$

$$\boxed{\bar{L} \equiv \bar{r} \times \bar{p} = \bar{r} \times m\bar{v}}$$



När partikeln förflyttar sig på konstant y-värde så är $\bar{L}$ konstant, ty komposanten $\perp$ mot $\bar{v}$ är konstant (y-komposanten).

Finns det något samband mellan $\bar{L}$ & $\bar{\tau}$?

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{r} \times m\bar{v}) = \frac{d\bar{r}}{dt} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{dm\bar{v}}{dt} = \bar{v} \times m\bar{v} + \bar{r} \times \frac{d\bar{p}}{dt} = 0 + \bar{r} \times \bar{F} = \bar{\tau}$$

↑ tiden ↑ rummet

parallella

$\varphi = 0 \Rightarrow 0$

BÄST om $\varphi = 90°$

$$\therefore \boxed{\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}}$$

FÖRELÄSNING 18 11/4 ELLÄRA

VÄXELSTRÖM

- Växelströmmen ändrar storlek & riktning
- Krävs 3 storheter för att beskriva växelströmmen: amplitud, vinkelfrekvens & fasvinkel

$$\boxed{V(t) = \underbrace{V_{DC}}_{\text{likström}} + \underbrace{V_{IN}}_{\text{amplitud}} \sin(\underbrace{\omega}_{\text{vinkelfrekvens}} t + \overbrace{\phi}^{\text{fasvinkel}})}$$

Konduktans

$$\boxed{I(t) = C\,\frac{dU(t)}{dt}}$$

strömmen över kondensatorn beror av kapacitansen och spänningsändringen.
[Farad]

Induktans, L

$$\boxed{U(t) = L\,\frac{dI(t)}{dt}}$$

Spänningen beror av spolens induktans och strömförändringen
[Henry]

Att räkna på växelström

Vi räknar på 3 saker, spolar, kondensatorer och resistorer, med komplexa tal som har 2 komponenter. Vinkeln tar vi bort

Impedans, Z

$$\boxed{Z = R + jX}$$

R = resistans
X = reaktans
j = komplexa enheten (som imaginära enheten, fast ellära)

- Impedans
  - Resistans
  - Reaktans
    - Induktans
    - Kapacitans

Fasvinkel: $\boxed{\phi = \arctan \frac{X}{R}}$ $\qquad \phi = \arctan \frac{\omega L - \frac{1}{\omega C}}{R}$

Specialfall: $X = 0 \Rightarrow$ impedans = resistans $(Z = R)$

Induktiv reaktans $\qquad$ Kapacitiv resistans

$\boxed{X_L = \omega L}$ $\qquad$ $\boxed{X_C = \frac{1}{\omega C}}$

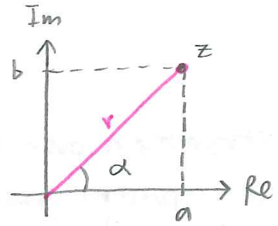
Enhet: $[\Omega]$ ty
R mäts i Ω och $Z = R + jX$

Admittans: $Y = \frac{1}{Z}$ ⇒ överkurs

$Z = R + j\omega L + \frac{1}{j\omega C} = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)$

KOMPLEXA TAL

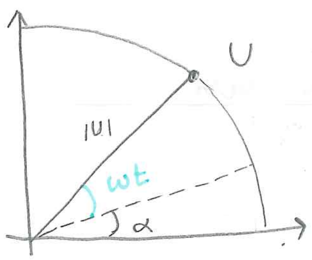
$Z = \underbrace{a + bi}_{\text{rektangulär form}} = \underbrace{re^{i\alpha} = \varepsilon e^{i\varphi}}_{\text{polär form}}$



i = imaginär enhet

j = i i ellära, eftersom i är behäftat med ström

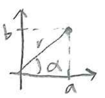
Avbilda spänning/ström



$U = |U| \sin(\omega t + \alpha)$

- I linjära nät (enbart R, C + L-komponenter) har vi frekvensen ω i alla delar av nätet. "Vi tar då bort ω-rotationen", dvs. ωt-vinkeln
- Strömmen roterar i samma hastighet som spänningen.
- Vi "fryser" systemet eftersom frekvensen är lika överallt, då behöver vi bara räkna med amplitud och fasvinkel, frekvensen försvinner ty systemet är fryst ⇒ jω-metoden.

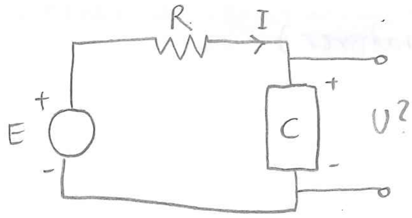
Räkneregler

-  $\left.\begin{array}{l} a = r\cos\alpha \\ b = r\sin\alpha \end{array}\right\} Z = r(\cos\alpha + i\sin\alpha)$
- $r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{r^2(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha)} = \sqrt{r^2} = r$
- $\alpha = \arctan \frac{b}{a}$
- $Z_T = Z_1 + Z_2 = (a_1 + a_2) + j(b_1 + b_2)$
- $Z_T = Z_1 \cdot Z_2 = (a_1 + jb_1)(a_2 + jb_2) = r_1 e^{j\alpha_1} \cdot r_2 e^{j\alpha_2} = r_1 r_2 e^{j(\alpha_1 + \alpha_2)}$
- $Z_T = \frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1 e^{j\alpha_1}}{r_2 e^{j\alpha_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\alpha_1 - \alpha_2)}$

$Z_1 = r_1 e^{j\alpha_1}$

$Z_2 = r_2 e^{j\alpha_2}$

Ex)



$Z_R = R + jX$ där $X = 0$

$Z_R = R$

$Z_C = ?$

$$\left.\begin{array}{l} U = L\dfrac{dI}{dt} \\ U = |U|e^{j(\omega t+\alpha_u)} \\ I = |I|e^{j(\omega t + \alpha_I)} \end{array}\right\}$$

$$|U|e^{j(\omega t+\alpha_u)} = L\frac{d|I|e^{j(\omega t+\alpha_I)}}{dt}$$

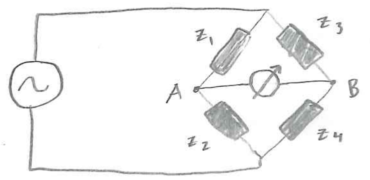
$$|U|e^{j(\cancel{\omega t}+\alpha_u)} = L|I|j\omega e^{j(\cancel{\omega t}+\alpha_I)}$$

$$\underbrace{|U|e^{j\alpha_u}} = L\underbrace{|I|j\omega e^{j\alpha_I}}$$

$$U = Lj\omega|I|e^{\alpha I} \Rightarrow \boxed{U = Lj\omega I}$$

⇒ Använd Kirschhoffs lagar för att "vandra" runt kretsen.

Växelströmsbrygga



$I_{AB} = 0$ ger spänningsdelning **(bryggan är i BALANS)**

$$\frac{Z_1}{Z_1+Z_2} = \frac{Z_3}{Z_3+Z_4} \Rightarrow \boxed{\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{Z_3}{Z_4}}$$

Maxwell/Wien-brygga

R_1 & R_2 kända

C_v & R_v variabla

Bestämma L_x & R_x

Två komplexa tal är lika omm $Re\,z$ & $Im\,z$ är lika ⇒ jämför VL & HL

BALANSVILLKOR

$$\frac{R_1}{Z_x} = \frac{Z_v}{R_2} \Rightarrow Z_x = R_1R_2\frac{1}{Z_v}$$

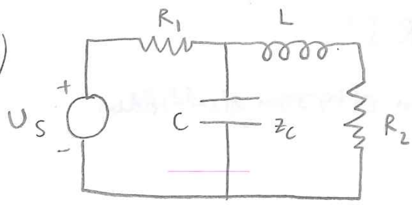
$$\frac{1}{Z_v} = \frac{1}{R_v} + \frac{1}{\frac{1}{j\omega C_v}} = \frac{1}{R_v} + j\omega C_v$$

$$Z_x = R_x + j\omega L_x = R_1R_2\left(\frac{1}{R_v} + j\omega C_v\right)$$

$$R_x = \frac{R_1R_2}{R_v}$$

$$\cancel{j\omega}L_x = R_1R_2C_v\cancel{j\omega} \Rightarrow L_x = R_1R_2C_v$$

Ex)



$C = 1\mu F$

$R_1 = 100k\Omega$

$R_2 = 100k\Omega$

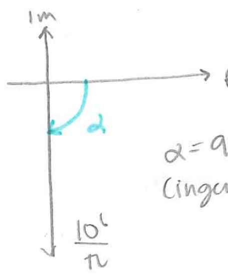
$L = 20H$

$\omega = \pi$

$U_S = 5\cos(\pi t)$ ← ω

a) Beräkna Z_C: $Z_C = \dfrac{1}{j\omega C} = \dfrac{1}{j\pi \cdot 10^{-6}} = \dfrac{j}{j^2\pi\cdot 10^{-6}} = \dfrac{10^6(-j)}{\pi}$

Z_C saknar alltså realdel. $Im\,z_C$ är negativ & väldigt stor.



$\alpha = 90°$ (ingen $Re\,z$)

$$Z_C = \frac{10^6}{\pi}e^{-90j}$$

ASVAR: $Z_C = \dfrac{10^6}{\pi}e^{-90j}$

Reaktanser är **frekvensberoende** (spolar & kondensatorer)

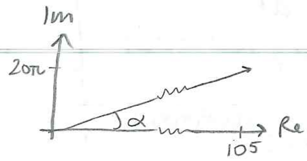
Resistanser är <u>inte</u> frekvensberoende.

$$\boxed{Z_C = \frac{1}{j\omega C}}$$ beroende på ω är Z_C olika!

forts

Ex) b) Beräkna Z_{LR_2}:

$Z_{LR_2} = L + R_2 = j\omega L + R_2 = 20\pi j + 100 \cdot 10^3 = 10^5 + 20\pi j$



Spolen + resistansen har praktiskt taget bara Re-del, dvs. de fungerar nästan som resistor. Alltså har vi låg Im med detta ω, skulle man höja ω får man större Im.

$$\left.\begin{aligned} a &= 10^5 \\ b &= 20\pi \\ r &= \sqrt{10^{5^2} + 20\pi^2} \approx 10^5 \\ \alpha &= \arctan\frac{20\pi}{10^5} \approx 0{,}03596 \end{aligned}\right\} \quad Z_{LR_2} = 10^5 e^{0{,}036j}$$

c) Parallellkoppla Z_C och $Z_{LR_2} \Rightarrow Z_{CLR_2}$

$$Z_{CLR_2} = \frac{Z_C Z_{LR_2}}{Z_C + Z_{LR_2}} \qquad \frac{1}{R} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} \Rightarrow \frac{1}{R} = \frac{B+A}{AB} \Rightarrow R = \frac{AB}{A+B}$$

Täljaren, polär form: $Z_C Z_{LR_2} = \frac{10^6}{\pi} \angle -90° \cdot 10^5 \angle 0{,}036 \rightarrow \frac{10^6 \cdot 10^5}{\pi} \angle -90 + 0{,}036° \Rightarrow \frac{10^{11}}{\pi} \angle -89{,}964°$

Nämnaren, rektangulär form:

$$\left.\begin{aligned} \text{Realdel} &= \underset{\text{Re}Z_C}{0} + \underset{\text{Re}Z_{LR_2}}{10^5} \\ \text{Im-del} &= -\frac{10^6}{\pi} + 20\pi \approx -\frac{10^6}{\pi} \end{aligned}\right\} \quad Z_C + Z_{LR_2} = 10^5 - \frac{10^6}{\pi} j$$

Belopp $= \sqrt{10^{5^2} + \left(\frac{10^6}{\pi}\right)^2} \approx 3{,}338 \cdot 10^5$

Argument: $\arctan\left(\frac{-\frac{10^6}{\pi}}{10^5}\right) = -72{,}57°$

$$\therefore Z_{CLR_2} = \frac{\frac{10^{11}}{\pi} \angle -89{,}964°}{3{,}338 \cdot 10^5 \angle -72{,}57} = 95407 \angle -89{,}964 \underset{\text{från nämnaren}}{-(-72{,}57°)} = 95407 \angle -17{,}394°$$

EFFEKT & VÄXELSTRÖM

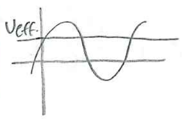
- Effekten i växelström pulserar. $P = UI$ & $U = RI \Rightarrow P = R \cdot I^2$
- Ex. glödlampa med frekvens 100 har 100 pulser/sekund, men eftersom glödtråden inte hinner svalna så ges det ut kontinuerligt ljus.
- Medelvärdet för effektutvecklingen i en växelströmskrets:

$$\boxed{P_{medel} = \frac{U_m I_m}{2} \cos\theta}$$

U_m = spänningsamplitud
I_m = strömamplitud
θ = fasdifferensen mellan U_i & I_i: fasvinkel

- Växelströms effektivärde

$$\boxed{U_{effektiv} = \frac{\text{amplitud}}{\sqrt{2}}}$$



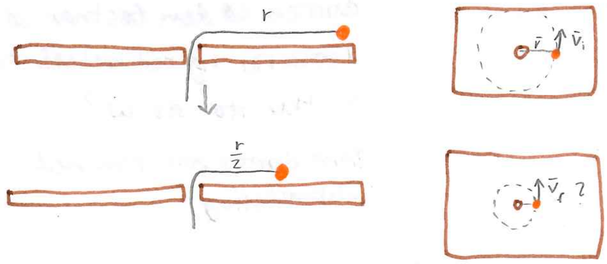
- Root mean square

$$\boxed{I_{RMS} = \frac{I_m}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T I^2 dT} = I_m \sin(\omega t + \phi_I)$$

Om $\bar{\tau} = 0 \Rightarrow \frac{d\bar{L}}{dt} = 0 \Rightarrow \bar{L}$ är konstant i tiden

$\boxed{\text{Om det inte finns några yttre vridande moment så bibehålls rörelsemängdsmomentet.}}$

Ex)



Slår till från sidan ⇒ börjar rotera

Genom att dra i snöret så kortas radien ner, och hastigheten ändras

⇒ hur mycket?

Man kan inte åstadkomma rotation genom att bara dra i snöret ⇒ det finns inga vridande moment. Spännkraften $\bar{T}$ ligger parallellt med radien $\bar{r}$

($\bar{r} \times \bar{F} = 0$ om parallella : $\varphi = 0$)

⇒ Rörelsemängdsmomentet bevaras

$|\bar{L}_i| = rmv_i$ Rät vinkel ger $\bar{r} \times m\bar{v}_i = rmv_i$

$|\bar{L}_f| = \frac{r}{2} mv_f \Rightarrow$ Inga vridande moment $\Rightarrow L_i = L_f$

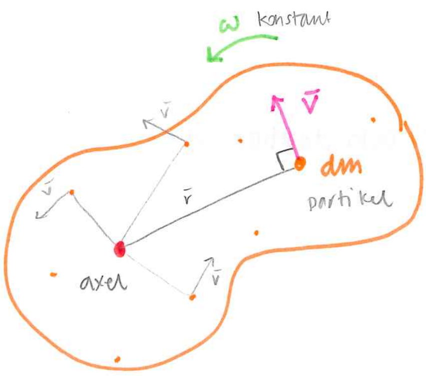
$\cancel{rm}v_i = \frac{\cancel{r}}{2} \cancel{m}v_f \Rightarrow v_f = 2v_i$

Rörelseenergi : $K_i = \frac{1}{2} mv_i^2$

$K_f = \frac{1}{2} mv_f^2 = \frac{1}{2} m(2v_i)^2 = \frac{1}{2} m4v_i^2 \Rightarrow K_f = 4K_i$

Den högre rörelseenergin innebär inte en energivinst, utan motsvarar energin som krävdes för att dra snöret från r till $\frac{r}{2}$.

$\bar{L} = \bar{r} \times m\bar{v}$



$|d\bar{L}| = rdmv$ (ty vinkelrätt)

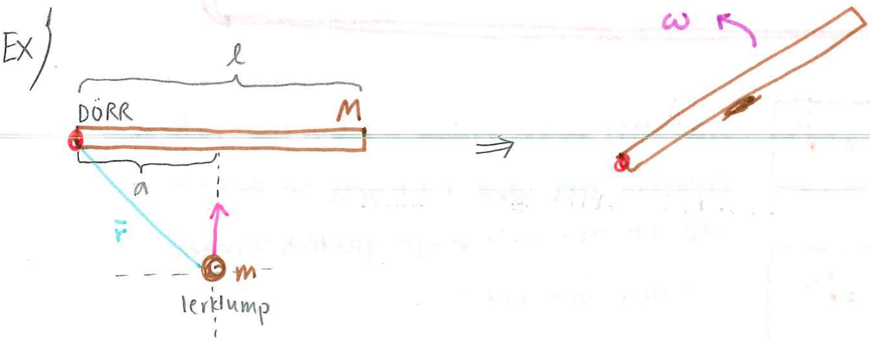
alla små dm rör sig ⊥ mot $\bar{r}$ från rotationsaxeln.

$$L = \int_{\text{hela kroppen}} dL = \int r\,dm\,v = \{v = \omega r\} = \int r\,dm\,\omega r = \omega \underbrace{\int r^2\,dm}_{I}$$

$\therefore \boxed{L = I\omega}$ L med avseende på rotationsaxeln.

$$\left.\begin{aligned} L &= I\omega \\ \tau &= \frac{dL}{dt} \end{aligned}\right\} \tau = \frac{d}{dt}(I\omega) = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha \qquad \boxed{\tau = I\alpha}$$

Ex)



Kastar lerklumpen mot dörren så den fastnar, så dörren rör sig med vinkelfrekvensen ω. Hur stor är ω?

Tänk dörren som pinne med utsträckning!

Konserveringslagar: 1. Mekanisk energis bevarande
2. Rörelsemängdens bevarande
3. Rörelsemängdsmomentet bevaras

1. bevaras inte: bollen deformeras, blir ljud och värme.

2. bevaras inte: finns externa krafter i gångjärnet, rörelsen ändrar riktning.

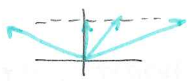
3. bevaras om det inte finns yttre vridande moment.

$\Rightarrow$ uppnås genom att räkna m.a.p. gångjärnet (räkna alla moment ut)

$I_{dörr} = \frac{1}{3}Ml^2$

Inga externa $\bar{\tau} \Rightarrow L_{syst.}$ bevaras. $\Rightarrow L_i = L_f$

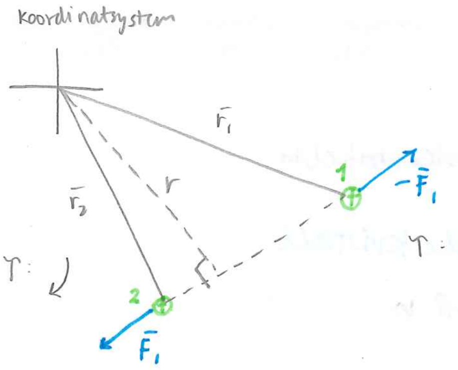
L_i = lerklumpens L m.a.p. = amv ty projektionen av på dörren = a



$$L_f = I_{TOT}\cdot\omega = \Big[\underbrace{\tfrac{1}{3}Ml^2}_{\text{dörren}} + \underbrace{ma^2}_{\text{klumpen}}\Big]\omega$$

$$\omega\left[\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2\right] = amv \Rightarrow \omega = \frac{amv}{\frac{1}{3}Ml^2 + ma^2}$$

Finns inre vridande moment när klumpen träffar dörren och drabbas av en kraft $\Rightarrow$ växelverkan mellan kroppar



Motriktade vridningar: har möjlighet att ta ut varandra

$\tau_1 = r F_1$

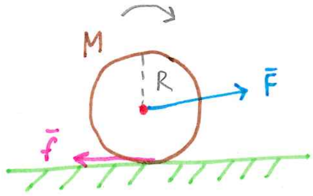
⇒ riktade åt olika håll

τ: ↻ $\tau_2 = r F_1$

$\therefore \sum_i \tau_i = 0$

⇒ inre τ påverkar inte, ty summan av dem = 0.

Typproblem : brödkavel / trädgårdsvält



Bestäm $\bar{a}_{cm}$ (tyngdpunktsaccelerationen)

Tröghetsmoment: $I = \frac{1}{2} MR^2$ (cylinder)

Utan friktion skulle inte kaveln rulla ⇒ VIKTIG!

$$\begin{cases} \bar{F} + \bar{f} = Ma_{cM} \\ fR = I\alpha = \underbrace{\frac{1}{2}MR^2}_{I} \cdot \underbrace{\frac{a_{cM}}{R}}_{\alpha} \end{cases}$$

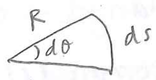
summan av alla externa krafter = massan · tyngdkraftens a, N II

summan av alla vridande moment

⇒ rullning utan glidning

(1) $F - f = Ma_{cM}$ (riktade åt olika håll)

(2) $f\cancel{R} = \frac{1}{2}M\cancel{R^2} \cdot \frac{a_{cM}}{\cancel{R}} \Rightarrow f = \frac{1}{2} Ma_{cM}$



$ds = Rd\theta$

$\frac{ds}{dt} = R\frac{d\theta}{dt}$

$\frac{d^2s}{dt^2} = R\frac{d^2\theta}{dt^2} \Rightarrow a = R\alpha$

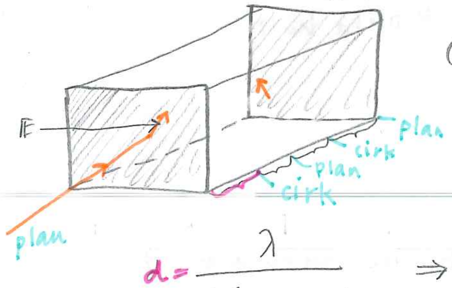
Insättning av (2) i (1):

$F - \frac{1}{2}Ma_{cM} = Ma_{cM} \Rightarrow F = \frac{3}{2}Ma_{cM} \Rightarrow a_{cm} = \frac{2}{3}\frac{F}{M}$ ty en del går till rotation.

$f = \frac{1}{2}\cancel{M} \cdot \frac{2}{3}\frac{F}{\cancel{M}} = \frac{F}{3}$ finns gräns för hur stor f kan bli för att det inte ska glida.

FÖRELÄSNING 23   12/5 VÅGOR

Rep.



$$d = \frac{\lambda}{4(n_{eo} - n_o)}$$

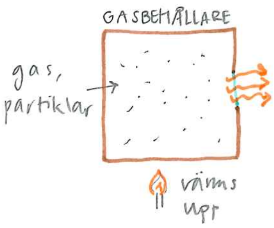
Planpolariserat ljus: Brewstervinkeln.

Cirkulärpol: dubbelbrytande kristall
- två ljushastigheter ⇒ två n
- kvarts, kalkspat...

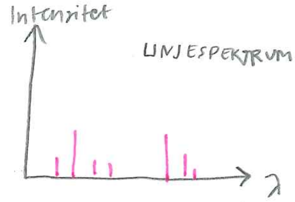
⇒ fasförskjutning med 90° ger cirk. pol

INLEDANDE KVANTMEKANIK

- Vågmekanik: ser e^- som vågor, ljus som partiklar
- Kom på 1900-talet
- Fasta kroppar strålar med EM-strålning ⇒ strålningslagar
- Fotoelektrisk effekt: fotoner puttar ut e^-
- Comptoneffekten: foton-e^--kollision ger upphov till spridning, energi och rörelsemängd bevaras.
- De Broglie-våglängd: alla partiklar har vågegenskaper. $\lambda = \frac{h}{p}$
- 1913: första atommodellen, Bohrs atommodell, funkar för H.
- Kvantisering: stående EM-vågor kan bara ha en viss energinivå
  ⇒ uppgiften är ofta att hitta möjliga energier.
- Newtonsk mekanik fungerar ej för små partiklar, som e^- i atom, molekyl etc.
- Schrödingerekvationen kom 1926 och blev den "riktiga" kvantmekaniken
- Vi går igenom det som hände INNAN, runt ~1900.

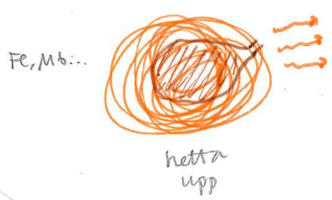


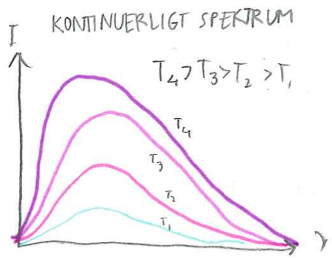
ljus ut ⇒ bara av vissa våglängder.



⇒ ingen teori

FAST KROPP





Upphettning ⇒ förskjutning av I_{max} mot kortare våglängder.

· Stort hålrum + litet hål ⇒ släta kurvor, oberoende av material

Planck förklarade fastkroppsstrålningen genom att kvantisera EM-strålningen.

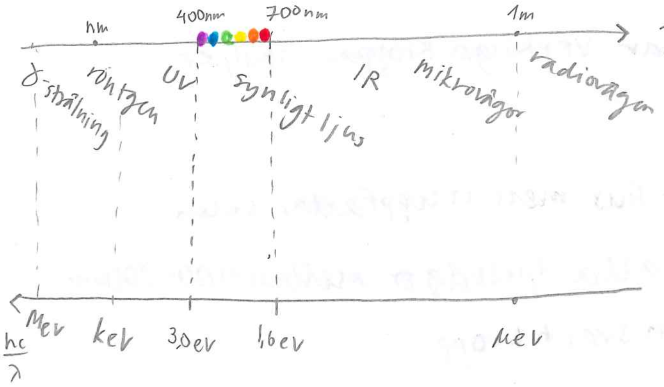
Ljuset uppträder som energikvanta (fotoner) och

$$\boxed{E_{foton} = h \cdot f = \frac{hc}{\lambda}}$$

c = ljushastigheten

$h = 6{,}63 \cdot 10^{-34}$ Js (Plancks konstant)

En viss foton är odelbar ⇒ en viss våglängd motsvarar ALLTID samma energi.



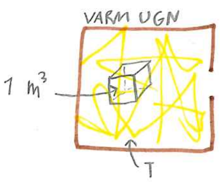
$$\boxed{1\,eV = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\,J}$$

Ögat kan bara uppfatta fotoner med energin 1,6–3,0 eV

Fotonen överför antingen ingen energi eller ALL sin energi, varpå γ-strålning är mycket skadligare än radiovågor.

$$\boxed{E_{foton} = \hbar\omega} \quad \text{där} \begin{cases} \hbar = \frac{h}{2\pi} \\ \omega = 2\pi \cdot f \end{cases}$$

PLANCKS STRÅLNINGSLAGAR



Planck räknade ut:

① Strålningsenergin/m^3 med våglängder inom $[\lambda, \lambda + d\lambda]$:

$$\rho(\lambda, T) \cdot d\lambda = \frac{8\pi hc}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \cdot d\lambda \quad [J/m^3] \text{ strålningstäthet}$$

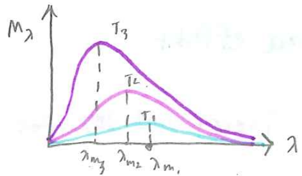
fotonenergi termisk energi

k = Boltzmanns konstant (ALLTID när kT) $= 1{,}38 \cdot 10^{-23}$ J/K

OBS! $e^{\text{dimensionslöst uttryck}}$!

② Från hålet utstrålad energi/s (spektral emittans)

$$M_\lambda \, d\lambda = \frac{c}{4} \cdot \rho(\lambda, T)\, d\lambda = \frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kT}} - 1} \, d\lambda \quad [J/m^2 \cdot s] = [W/m^2]$$



⇒ Våglängden blir kortare för intensitetsmax vid högre temperaturer.

Planckkurvan har ett max vid $\lambda_m \Rightarrow$ derivera och sätt $=0$.

$$\boxed{\lambda_m = \frac{\frac{hc}{5k}}{T} = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,m \cdot K}{T}}$$

Wiens förskjutningslag

- Används för att bestämma temperaturen hos en kropp:

$$\lambda_{m1} \cdot T_1 = \lambda_{m2} \cdot T_2 = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\, m \cdot K$$

- Febertermometrar fungerar på detta sättet.
- Blir bara perfekt för s.k. **svarta kroppar**, verkliga kroppar skiljer sig lite.
- Solen skickar ut mest energi med grönt ljus, men vi uppfattar solen som gul eftersom vi sammanställer alla ljusvågor mellan 400-700nm (vi "integrerar"). Solen fungerar som en svart kropp.
- En **svart yta** absorberar allt inkommande ljus $\Rightarrow$ litet hål med stort hålrum är en bra approximation: hålet "är" en svart yta.

Ex) Solen har strålningsmax vid $\approx 500\,nm = \lambda_m$

$$\therefore T = \frac{2{,}9 \cdot 10^{-3}\,\cancel{m} \cdot K}{500 \cdot 10^{-9}\,\cancel{m}} = 5800\,K$$

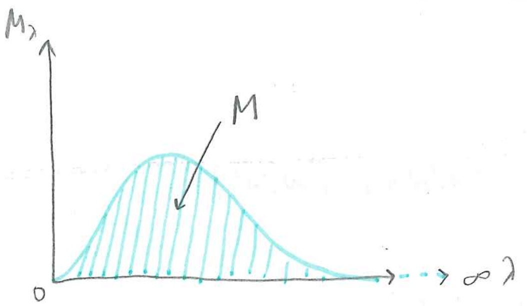
Strålar solen som en Planckkurva (är den en perfekt svart kropp)?

SVAR: Nej, men till en hyfsad approximation.

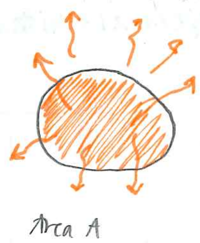
③ Totalt utstrålad effekt/m^2 = $M = \int_0^\infty M_\lambda(\lambda, T)\,d\lambda$

$$\boxed{M = \frac{2\pi^5 k}{15c^2h^3} \cdot T^4 = \sigma \cdot T^4} \quad [W/m^2] \quad \text{där } \sigma = 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2 \cdot K^4}$$

Stefan-Boltzmanns lag



$\Rightarrow$



$$\boxed{P = A\sigma \cdot T^4} \quad [W]$$

Totalt utstrålad effekt

Vid rumstemperatur strålar nästan allt ungefär som en svart kropp. Högre T $\Rightarrow$ 50-70% fel.

- Hettar man upp koppar ser den röd ut ⇒ är röd i reflektion.
- Vid 700 °C är järn lite röd, koppar lyser inte alls.
- Vid 900 °C lyser koppar grönt eftersom det röda interna ljuset reflekteras bra, men transmitteras inte.
- Viktigt att skilja på reflektion och transmission ⇒ olika färg.

Ex) Hur mycket strålar en människa?

$$\begin{cases} T \approx 300\,K \\ A \approx 1\,m^2 \end{cases} \Rightarrow P_{utstrålad} = A\sigma \cdot T^4 = 1\,m^2 \cdot 5{,}67 \cdot 10^{-8}\,\frac{W}{m^2K^4}\,(300\,K)^4 \approx 400\,W$$

⇒ Behöver energikompensera genom att äta, men vi får även strålning mot oss från omgivningen: hitta nettostrålning

⇒ Är man 10 personer i ett rum kan man värma upp rummet utan element, även på vintern.

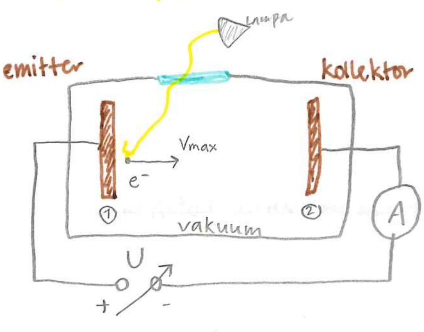
FÖRELÄSNING 24 13/5 VÅGOR

Rep. Strålningslagar

- Planck: $\frac{2\pi hc^2}{\lambda^5} \cdot \frac{1}{e^{\frac{hc}{\lambda kt}} - 1} \cdot d\lambda$ — Utstrålad energi inom ett visst våglängdsintervall, $d\lambda$. Exakta värden kräver integrering.
- Wien: $\lambda_m \cdot T = 2{,}9 \cdot 10^{-3}\,m \cdot K$ — Maximal energi vid λ_m
- Stefan-Boltzmann: $P_{ut} = A \cdot \sigma \cdot T^4$ — Utstrålad effekt från en kropp med arean A

RÄKNA A1, A3 & A4.

FOTOELEKTRISK EFFEKT



FOTOCELL

Har spänningskälla mellan de olika elektroderna för att lägga ett EM-fält som stoppar e^- ⇒ ger utslag på amperemetern

För att få ut e^- måste man ha tillräckligt kort våglängd: gränsvåglängd

Fotoner avlämnar sin energi till e^- i emittern som lösgör sig (emitteras)

$$E_{foton} = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$\boxed{E_{k,e,max} = \frac{1}{2}mv_{max}^2 = \frac{hc}{\lambda} - \Phi}$$

$\Phi_{Na} = 3\,eV$; $\Phi_{Cu} = 4{,}6\,eV$; $\Phi_{Cs} = 1{,}8\,eV$

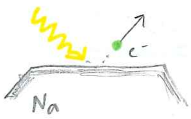
Φ = utträdesarbetet (materialkonstant) minsta energi för att FE ska ske.

∴ För att lösgöra e^- krävs att $\frac{hc}{\lambda} \geq \phi$

Fungerar även på andra material, men dåliga ledare (isolatorer) kräver att fotocellen jordas, och så laddas de upp, släpper e^- & blir positivt laddade.

Spärrspänning: den spänning vi lägger över för att få 0 i ström
$1V \Rightarrow E_k = 1eV$. Vi bromsar alltså e^-.

Ex)



$\lambda = 248 nm$
$\phi_{Na} = 3eV$
$E_k = ?$

$$E_{foton} = \frac{hc}{\lambda} = \frac{6{,}63 \cdot 10^{-34} J \cdot 3 \cdot 10^8 m/s}{248 \cdot 10^{-9} m} \cdot \frac{1}{1{,}6 \cdot 10^{-19}} = 5{,}0 eV$$

Elektroner kommer ut med kinetisk energi i intervallet $[0,2]$ eV (kan mätas upp)

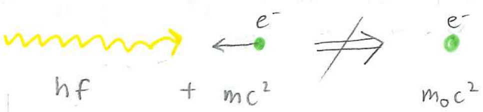
De e^- som inte får tillräckligt med energi för att emitteras absorberar energi och bidrar till värmeökning hos metallen.

COMPTONEFFEKT

Foton kolliderar med från början fri elektron (helt avskild från andra laddade partiklar). Fotonen kan inte avlämna all sin energi till e^- eftersom det inte går att bevara både energi och rörelsemängd i en sån process.

omöjligt!

Sett från annat koordinatsystem där den sammanlagda rörelsemängden = 0

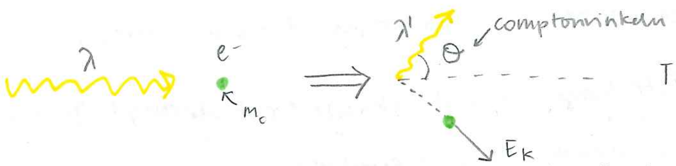


Stillastående e^- med viloenergin $E = m_0c^2$ ← vilomassa

relativistiska massan $m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$

$E_{VL} > E_{HL}$ ty $m > m_0$ ⇒ ∴ omöjligt!

Det som händer är



Tänk fotonen som en partikel ⇒ "vanlig" kollision

$$\boxed{\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_0 c}(1 - \cos\theta)}$$

$\underbrace{\lambda' - \lambda}_{\text{ljuset ändrar färg}}$

Detta visar två saker:

- $E_{foton} = \frac{hc}{\lambda}$
- $p_{foton} = \frac{E_{foton}}{c} = \frac{hc}{\lambda c} = \frac{h}{\lambda}$ (rörelsemängd)

Kort om relativitetsteori

Viloenergi : $E_0 = m_0 c^2$

Kinetisk energi : E_K

Total energi : $E = mc^2$ där $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$ relativistiska massan är funktion av hastigheten

$$E = E_0 + E_K$$

$$\therefore E_K = E - E_0 = mc^2 - m_0c^2 = m_0c^2\left(\frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - 1\right)$$

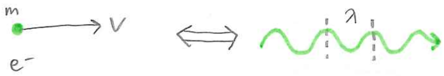
$\frac{1}{2}m_0v^2$ är inte bra om $v > \frac{1}{10}c \Rightarrow$ ger felet 1%.

Störst våglängdsändring då $\theta = 180°$

$$E_K = \frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'}$$

MATERIEVÅGLÄNGD (de Broglie)

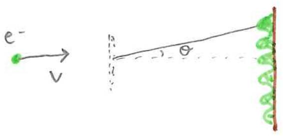
En partikel (t.ex. en elektron) har vågkaraktär, t.ex. ger de upphov till diffraktionsmönster bakom enkel-, dubbelspalt & gitter, precis som ljus & vågor.



$$\boxed{\lambda = \frac{h}{mv}}$$ **de Broglie-våglängd**, de Broglies relation

ELLER $\boxed{p = \hbar k}$ $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, $\hbar = \frac{h}{2\pi}$, $mv = p$

Testat med experiment :



Använder t.ex. aluminiumfolie som gitter, där atomerna ligger välstrukturerad. Rent teoretiskt skulle det fungera likadant med tennisbollar, men det är svårt att bygga bra gitter. Den största partikeln man "lyckats" med är C_{60}-bollar, sk. fullerener. e^--kanon ger känd $E_K \to p \to \lambda = \frac{h}{p}$

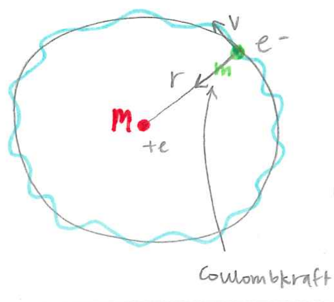
C_{60} = fullerener

Rörelsemängd för partiklar: $p = \frac{1}{c}\sqrt{E^2 - E_0^2}$ där E_0 = viloenergi, $E_{0,foton} = 0$ (utanför kursen)

Om $E_K \gtrsim \frac{1}{200} \cdot m_0c^2$ så behövs relativistisk behandling, $E_{0,e^-} = m_0c^2 = 511$ keV, men vi får nöja oss med $\frac{1}{2}m_0v^2$

BOHRS ATOMMODELL (år 1913)

Fungerar för H-atomen (och förjoniserad He), då den bara har en e^- runt kärnan.



$M_{kärna} \gg m_{elektron}$

e^- snurrar runt kärnan $\Rightarrow E_{K,kärnan} = 0$

Uppgift : Beräkna $E_{TOT} = E_K + E_p$

Väteatomen

- en kärna (proton
- en elektron

Coulombkraften: $\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = m \cdot \frac{v^2}{r}$ **(1)** $\Rightarrow \frac{mv^2}{2} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r}$

$$E_{TOT} = \frac{mv^2}{2} + \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} + \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r} \quad \textbf{(2)}$$

När $E_{TOT} = 0$ har man nått jonisationsgränsen, och $E_{TOT} > 0$ motsvarar joniserad atom

$E_p = \int_\infty^r F_c \, dr = \int_\infty^r \frac{1}{r^2} dr \Rightarrow \frac{1}{r}$ integrerar coulombkraften.

Kan bara ha ett visst värde på r för att få tillåtna energinivåer.

Bohr: Varvet runt för e^- är $n \cdot \lambda$ ty stående vågor: $\boxed{2\pi r = n \cdot \frac{h}{mv}}$ **(3)**

Ekvation **(1)** och **(3)** har två obekanta: v & r

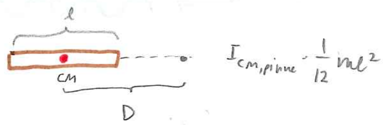
$\therefore$ $\boxed{r = n^2 \cdot \frac{4\pi\varepsilon_0 \hbar^2}{m c_2} = n^2 \cdot 0{,}53 \text{ Å}}$ där n är heltal $\Rightarrow$ $\boxed{E = -\frac{13{,}6 \text{ eV}}{n^2}}$

Tillåtna energinivåer

FÖRELÄSNING 25 13/5 MEKANIK

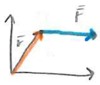
VERKTYGSLÅDA

- Tröghetsmoment: $I = \int r^2 dm$
- Tröghetsmoment runt godtycklig punkt: $I = I_{CM} + MD^2$

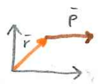


$I_{cm,pinne} = \frac{1}{12} m\ell^2$

- Vridande moment: $\bar{\tau} = \bar{r} \times \bar{F}$



- Rörelsemängdsmoment: $\bar{L} = \bar{r} \times \bar{p}$



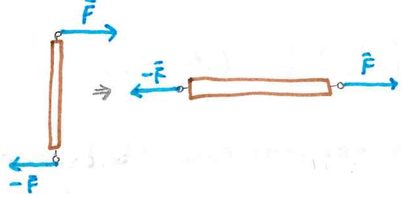
$\bar{\tau} = \frac{d\bar{L}}{dt}$

- $\bar{\tau} = I\bar{\alpha}$ $\alpha < 0$ ↷, $\alpha > 0$ ↺
- $\bar{L} = I\bar{\omega}$

Villkor för stabilitet

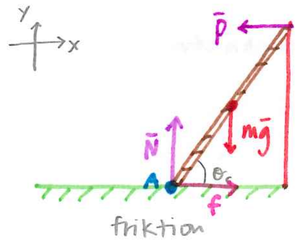
Partiklar: $\sum_i \bar{F}_i = 0$

Kroppar med utsträckning:



$$\begin{cases} \sum_i \bar{F}_i = 0 \\ \sum_i \bar{\tau}_i = 0 \end{cases}$$

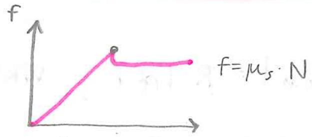
Ex) Luta stege mot friktionsfri vägg. Vid vilken θ_c är det precis så ~~att~~ stegen ramlar ner



Jämntjock stege med tyngdpunkt i mitten och längden l.

$\sum_i \bar{F}_i = 0$ $\quad$ x: $p = f$ (längden)

$\quad$ y: $N = mg$

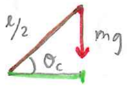


När vinkeln ändras så ändras friktions- och normalkraften eftersom $f = \mu_s \cdot N$.

$\sum_i \bar{T}_i = 0$ med avseende på vilken punkt som helst, ty den ska ALLTID bli noll.

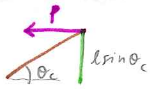
Vi väljer att rotera kring axeln A, ty där ger inte $\bar{N}$ och $\bar{f}$ upphov till vridande moment.

$\bar{T}_{\circlearrowleft}$ (tyngdkraften)



$\Rightarrow \bar{T}_{\circlearrowleft} = \underbrace{\frac{l}{2}\cos\theta_c}\cdot mg$ ty vi vill endast ha delen av momentarmen som är vinkelrät mot mg (kryssprodukt)

$\bar{T}_G$ (normalkraft från väggen)



$\Rightarrow \bar{T}_{\circlearrowright} = \underbrace{l\sin\theta_c}\cdot P$ $\perp$ mot P!

$\frac{\cancel{l}}{2}\cos\theta_c \, mg = \cancel{l}\sin\theta_c \cdot P$ men $p = f = N\mu_s = mg\mu_s$ eftersom $f = N\cdot\mu_s$ och $N = mg$

$\frac{1}{2}\cos\theta_c \, \cancel{mg} = \sin\theta_c \, \cancel{mg}\mu_s$

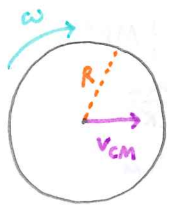
$\frac{\sin\theta_c}{\cos\theta_c} = \tan\theta_c = \frac{1}{2\mu_s}$ $\Rightarrow$ Vinkeln ges av $\theta_c = \arctan\frac{1}{2\mu_s}$

KOM IHÅG: Välj alltid momentarm $\perp$ mot kraften man ska beräkna kryssprodukt mot.

RULLNING utan glidning

$|\bar{v}_{cm}| = R|\bar{\omega}|$

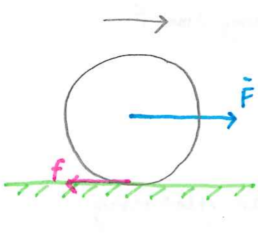
$|\bar{a}_{cm}| = R|\bar{\alpha}|$



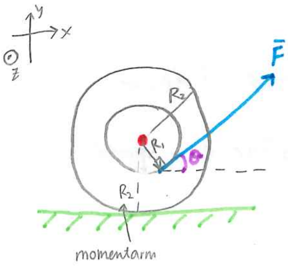
Rullande kropp: $K = \frac{1}{2}MV_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$ där $\omega^2 = \left(\frac{V_{cm}}{R}\right)^2$

$\Rightarrow$ rullande kropp har större rörelseenergi än en kropp som glider med samma hastighet.

Masspartiklar på periferin "åker" längre.



Brödkaveln rullar tack vare friktionskraften



Vill veta när tyngdpunktens acceleration byter tecken.

$\bar{f} = f\hat{i}$ (vet ingenting om riktning, men elimineras ändå sen)

$\boxed{\sum_i \bar{F}_i = M\bar{a}_{cm}}$ $\Rightarrow F\cos\theta\,\hat{i} + f\hat{i} = Ma_{cm}\hat{i}$ $\Rightarrow$ $\boxed{F\cos\theta + f = Ma_{cm}}$

horisontell komponent

vet inte tecknet

tecken ger riktningen

$\bar\tau \parallel \bar\alpha$

$\sum_i \bar\tau_i = I\bar\alpha$ Rullen vill snurra moturs om endast $\bar F$ verkar på den $\Rightarrow R_1 F\hat k + R_2 f\hat k = I\alpha\hat k$

$\boxed{R_1 F + R_2 f = I\alpha}$ Andra ekvationen vi har att jobba med, men vi har tre obekanta. $R_1 \perp F$, $R_2 \perp f$. Ingenting rör sig i $\hat k$-riktningen.

$|\bar a_{CM}| = R|\bar\alpha|$ viktigt med storlek eftersom de har olika riktning.

Relation mellan a_{CM} och α: $a_{CM} = -R_2\alpha$ Minus framför ty a_{CM} är positiv när den rullar framåt, dvs. medursrotation $\Rightarrow \alpha$ är negativ.

$$\begin{cases} R_1F\,(\bar{+})\,R_2 f = I\left(+\frac{a_{CM}}{R_2}\right) \\ F\cos\theta\cdot R_2 + f\cdot R_2 = Ma_{CM}\cdot R_2 \end{cases}$$

Två ekvationer och två obekanta: f och $a_{CM} \Rightarrow$ vill eliminera f

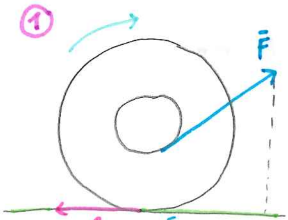
addera

$$F(R_2\cos\theta - R_1) = \left(R_2M + \frac{I}{R_2}\right)a_{CM} \Rightarrow a_{CM} = \frac{R_2\left(\cos\theta - \frac{R_1}{R_2}\right)}{\left(R_2M + \frac{I}{R_2}\right)}\cdot F$$

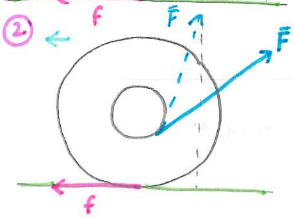
Tecknet på a_{CM} bestäms av $\cos\theta - \frac{R_1}{R_2}$: positivt $\rightarrow a_{CM} > 0$, negativt $\rightarrow a_{CM} < 0$.

Åt vilket håll är friktionen riktad?

1



2



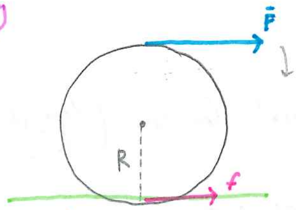
1. $a_{CM} > 0 \Rightarrow$ rullning åt höger. f måste vara riktad åt VÄNSTER

2. $a_{CM} < 0 \Rightarrow$ rullning åt vänster.

f måste vara riktad åt VÄNSTER för att det ska bli nettokraft åt det hållet.

När $\bar F$:s projektion på horisontalplanet är mindre än f så rullar rullen åt andra hållet (Newtons andra lag).

3



Cylinder: $I = \frac{1}{2}MR^2$

3. $\bar F + \bar f = ma_{CM}$

$F + f = ma_{CM}$

$fR - FR = I\alpha = \frac{1}{2}MR^2\alpha$ $\quad \alpha = -\frac{a_{CM}}{R}$

$f\cancel{R} - F\cancel{R} = -\frac{1}{2}MR^2\frac{a_{CM}}{\cancel{R}}$

$f - F = -\frac{1}{2}MR^2 a_{CM}$

$$\begin{aligned} F + f &= Ma_{CM} \\ -2F + 2f &= -Ma_{CM} \\ \hline -F + 3f &= 0 \end{aligned}$$

$\Rightarrow f = \frac{F}{3} \Rightarrow f$ har samma riktning som F

∵ Friktionen försöker hindra rotationen som F orsakar, dvs. hindrar glidning.

Måste titta på summan av krafterna och se var friktionen är riktad. I dessa fall försöker F rotera moturs, men i 1 roterar den medurs och då måste den ändå vara riktad åt vänster.